情報地質 第27巻 第2号 048-051頁 2016年
Geoinformatics, vol.27, no.2, pp.048-051, 2016

グラフ理論による露頭構造と層序の数学的表現

-露頭の同一性-

河西秀夫*

Mathematical Models of Geological Structure of Outcrops and Stratigraphy Based on Graph Theory

- The identity between outcrops-

Hideo KASAI*

山梨学院大学, Yamanashi Gakuin University,Sakaori2-4-5.Koufu city,Yamanashi Prefecture 400-8575,Japan,E-mail kasai@ygu.ac.jp

キーワード: グラフ理論, 構造グラフ, 層序グラフ, 同形

Key words：Graph theory, Structure graph, Stratigraphic graph, isomorphic graph

1. 始めに

著者は露頭データベースの設計にあたり，露頭でみられる地質構造や層序の記述方法としてラベル付き有向グラフを使用した構造グラフと層序グラフを提案した(河西, 2005 ; Kasai, 2009 ; 河西 2012 : 河西 2015). グラフの頂点のラベルは地層名，弧のラベルは地層間の接触関係である.

露頭データベースに必要な機能の１つに露頭の対比機能が考えられる.異なる地点で観察された２つの露頭が同じ構造あるいは同じ層序の露頭であるかを判断する場合がある. ２つの露頭が同じ構造あるいは同じ層序の露頭であることを露頭の同一ということにする.構造グラフと層序グラフはラベル付き有向グラフなので、グラフ理論の観点から露頭の同一性の条件を検討する必要がある. 今回はこの結果を報告する.

2. 構造グラフと層序グラフ

地層の逆転がない地質構造に対して，下で定義するような V, $\boldsymbol{R}^{\#}$, ϕ_V, ϕ_A で定義される有向グラフ

$$G=(V, R^{\#}, \phi_V, \phi_A)$$

を「構造グラフ」と呼ぶ(河西, 2013, 河西 2015).

1 つの露頭で識別された地質体の集合を V とする. V の元である 2 つの地質体 x と y が互いに接触している場合，x と y の関係を $xR^{\#}y$ と書く.

$$\boldsymbol{R}^{+}=\{(x,y) | xRy \vee xIy \vee xFy, x \in V, y \in V\}$$

$$\boldsymbol{R}^{\#} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}^{+} \vee xLy \vee xDy$$

xRy は空間的な上下関係であり, x が空間的に下側にある. xIy は深成岩あるいは岩脈 y が地質体 x に貫入している関係である. xFy は断層破砕帯 y が地質体 x を切断している関係である. $xR^{\#}y$ は空間的な上下関係 xRy, 貫入関係 xIy, 断層関係 xFy, 包含関係 xLy, 同時異相 xDy を統一的に表現したものである.

ϕ_V は V の元である各地質体に地層名を対応付ける写像である. $xR^{\#}y$ である x と y の接触関係の名称を $\phi_A(x, y)$ と書く. ϕ_A は順序対(x, y)に接触関係の名称の集合 A={整合, 不整合, 貫入, 断層, 包含, 同時異相}の 1 つの元を対応つける写像 $\phi_A : R \rightarrow A$ である. 構造グラフは露頭の構造を表すラベル付き有向グラフであり，頂点と弧はそれぞれ地質体と地質体間の接触関係を表している.

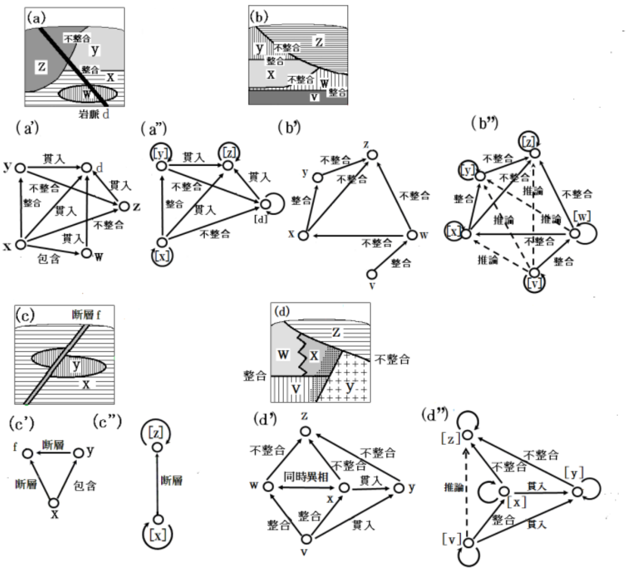
層序グラフは露頭における地質体の新旧関係を表したグラフであり，以下のように定義される集合 V 上の関係 U^*で定義されるラベル付き有向グラフ

$$S=(V/E^*, \boldsymbol{U}^*, \phi_V, \phi_A)$$

を「層序グラフ」という(河西 2012, 2013).

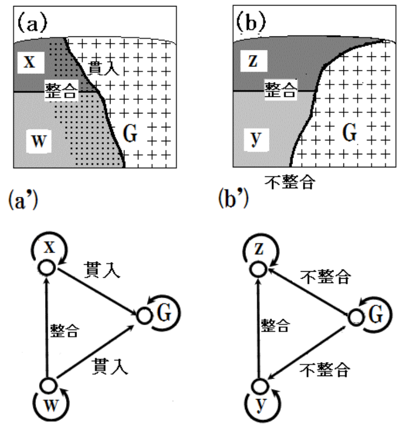
E^*は形成時期に関する同値関係である.

層序グラフは地質体間の新旧関係を表示したラベル付き有向グラフであり，頂点と弧はそれぞれ地質体と地質体間の新旧関係を表している. 推移的閉包により弧が追加されてそれらに新たな名称がつけられることがある. この推移的閉包によりつけられた弧のラベルは一律に"推論"とする. 本文では，地質体の形成順序と地質体間の接触関係を含めたものを層序と呼ぶ(河西, 2012) . 第 1 図に構造グラフと層序グラフの例を示す.



第1図　構造グラフと層序グラフ

各露頭断面に対応する構造グラフを(a'), (b'), (c'), (d')に，層序グラフを，(a"), (b"), (c"), (d")に示す．



第2図　同一でない露頭の例

露頭断面(a)(b)とも3つの地質体から構成されているが，接触関係が異なるので，２つの露頭は同一ではない．

3. 露頭の同一性

3-1. 露頭の同一性

複数の地点に露頭が存在する場合，同じ露頭構造や同じ露頭層序であると判断される露頭が存在することがある．露頭構造とは露出している地質体の接触関係を表すとする．2 つの露頭の露頭構造が同じであるということは，露出している地質体の数が等しくかつ地質体の名称が同じであり，地質体相互の接触関係が同じであることとする．露頭層序が同じということは，露頭構造が等しく，かつ露出している地質体の形成順序が同じであることを意味する．露頭層序が同じ２つの露頭を同一の露頭と呼ぶことにする．

2つの露頭 G_1 と G_2 が存在するとする．この2つの露頭が同一であるということは，露頭層序が同じことである．露頭構造と露頭層序はそれぞれ構造グラフと層序グラフであらわされるので，ある地点に存在する露頭と同じ露頭構造あるいは露頭層序が存在するかどうかはグラフの同一性を調べることになる．ここではグラフの同一性について検討する．

第2図は地質体 x と y，深成岩 G から露頭で，地質体の数は(a)(b)ともに3である．(a)は貫入の例，(b)は不整合の例である．対応する地質体の名称が同じであっても，(a)と(b)は地質体の接触関係が異なるので同じ構造と層序の露頭ではなく，同一の露頭ではない．

3-2.　グラフの同一性

無向グラフの場合，2 つのグラフ $G_1=(V_1,E_1)$ と $G_2=(V_2,E_2)$が同形であるとは, 次の写像 θ と ϕが存在することである(Distiel,, 2005).

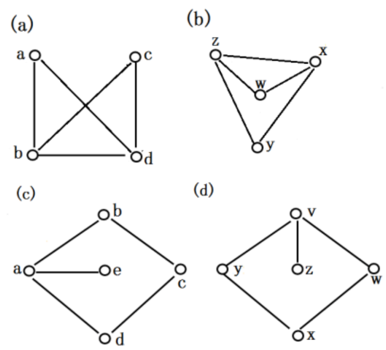
$$\theta : V_1 \rightarrow V_2$$

$$\forall x,\ y \in E_1 \text{ について } xy \in E_1 \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E_2$$

G_1 と G_2 が同形であることを

$$G_1 \cong G_2$$

と書く．これは，2 つのグラフの頂点の数が等しく，頂点間の辺が対応していることを意味している．G_2が G_1 自身の同形の場合，自形という．グラフ G と自形であるグラフの集合を自形グループという(Bondy and Murty). 第3図に無向グラフの同形と自形の例を示す．無向グラフの場合，頂点につけられた記号はラベルではなく，頂点を識別する単なる標識である．



第3図　無向グラフの同一性

図(a)と(b)は形が異なるが，頂点に 1-1 対応があるので同形である．図(c)と図(d)は自形である．図(a)を時計回りに 90 度回転すると(b)になる

Tuttle(2001)と Bondy and Mirty(2008)は頂点も辺も存

在しないグラフを空グラフと呼び, Wilson(2010)は辺集合が存在しないグラフを空グラフと呼んでいる．本論文では, Wilson に従って, 辺集合が存在しないグラフ，すなわち頂点だけからなるグラフを空グラフと呼ぶことにする．空グラフは 1 つの地質体しか露出していない露頭に対応している．2 つのグラフがそれぞれ空グラフ，すなわち頂点が 1 つしかないグラフ同士は同形であり，かつ自形である．

有向グラフの場合，2 つのグラフ $G_1=(V_1,A_1)$ と $G_2=(V_2,A_2)$が同形であるとは， G_1 と G_2 に次の写像 θ と ϕが存在することである．

$\theta : V_1 \rightarrow V_2$

$\forall x, y \in E_1$ について $xy \in E_1 \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E_2$

さらに，次の写像 η が存在する必要がある．

$\eta : xKy \in A_1 \Leftrightarrow \phi(x)K\phi(y) \in A_2$

写像 η は対応する頂点間の弧の方向が同じであることを意味する．

ラベル付き有効グラフの場合は，さらに

$\phi_V(x) \in V_1 = \phi_v(\phi(x)) \in V_2$

$\phi_A(xy) \in A_1 = \phi_A(\phi(x)\phi(y)) \in A_2$

が成り立つときは G_1 と G_2 は自形になる．これは頂点と弧のラベルが同じであることを意味する．

3-3.　構造グラフと層序グラフの同形

構造グラフと層序グラフは両方ともラベル付き有向グラフである．

2 つの構造グラフと層序グラフ $G_1=(V_1,R_1{}^{\#}, \phi_{V1}, \phi_{A1})$と $G=(V_2,R_2{}^{\#}, \phi_{V2}, \phi_{A2})$, $S_1=(V_1/E^*, \boldsymbol{U_1}^*, \phi_{V1}, \phi_{A1})$ $S_2=(V_2/E^*, \boldsymbol{U_2}^*, \phi_{V2}, \phi_{A2})$ が存在するとする．2 つの露頭が同一であることは構造グラフと層序グラフの両方が自形であることであり，それぞれ同じ自形グループに属することに等しい．

構造グラフと層序グラフはラベル付き有向グラフなので，頂点の数，頂点のラベル，弧の向き，弧のラベルが問題になる．2 つのグラフが自形である条件は次のようになる．

(1)2 つの構造グラフ G_1 と G_2 が存在し，両方とも空グラフとする．2 つの空グラフは明らかに同形である．この場合，頂点のラベルが同じであれば G_1 と G_2 は自形である．$V(G_1)=\{a\}$，$V(G_2)=\{x\}$とすると，$\phi_V(x)= \phi_V(a)$の場合自形である．層序グラフ S_1 と S_2 の場合も同様に，$V(S_1)=\{a\}$，$V(S_2)=\{x\}$とすると，$\phi_V(x)= \phi_V(a)$の場合自形である．

(2) 2 つの構造グラフ G_1 と G_2 が存在し，両方とも空グラフではないとする．G_1 と G_2 が同形であるとは次の写像が存在することである．

$\theta : V_1 \rightarrow V_2$

$\forall x, y \in A_1$ について $xy \in A_1 \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in A_2$

$xKy \in A_1 \Leftrightarrow \phi(x)K\phi(y) \in A_2$

さらに，構造グラフ G_1 と G_2 が次の条件を満たす場合は，自形である．

$\phi_v(x)= \phi_v(\phi(x))$

$\phi_A(x, y)= \phi_A(\phi(x), \phi(y))$

これは対応する頂点のラベルと，対応する弧のラベルが同じことを意味している. 層序グラフ S_1 と S_2 の場合も同様である．

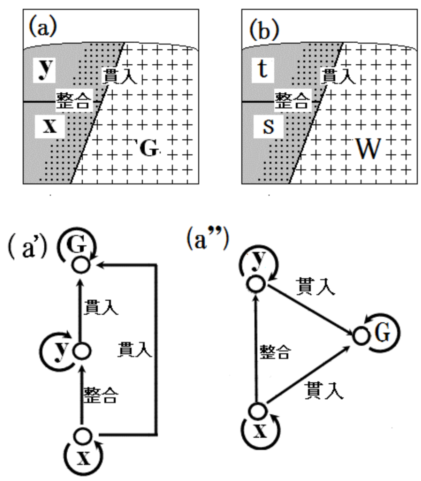
第 4 図(a)と(b)は互いに整合関係にある 2 つの地質体に深成岩体が貫入している例である．この場合，$V_1 \rightarrow V_2$， $\forall x, y \in A_1$ について $xy \in A_1 \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in A_2$，$xKy \in A_1 \Leftrightarrow \phi(x)K\phi(y) \in A_2$ が成立しているので同形である．露頭断面(a)と(b)の層序はそれぞれ次のようになる。

P_a'=(x、整合、y、貫入、G)

P_b'=(s、整合、t、貫入、W)

$\phi_v(x)= \phi_v(s)$， $\phi_v(y)= \phi_v(t)$， $\phi_v(G)= \phi_v(W)$が成立する場合，(a)と(b)は自形である． $\phi_v(x) \neq \phi_v(s)$， $\phi_v(y) \neq \phi_v(t)$， $\phi_v(G) \neq \phi_v(W)$の場合は同形でない.

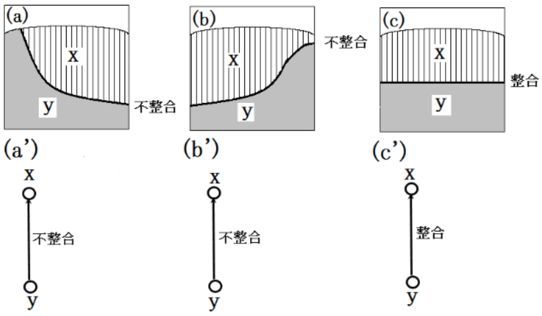
一方、露頭断面(a)に対して層序グラフは(a')や(b')の形に描かれる．(a')と(b')のグラフは同形である．構造グラフあるいは層序グラフが同型とはグラフの表示の形が異なることをいい，自形とはグラフの形が同じことを言う．グラフ理論でいう同形とは(a')と(b')のようにグラフの形の事である。



第 4 図　グラフの同形

露頭断面(a)と(b)は $\phi_v(x)=\phi_v(s)$, $\phi_v(y)=\phi_v(t)$, $\phi_v(G)=\phi_v(W)$が成立する場合自形となる．露頭断面(a)の層序グラフは(a')あるいは(a")の形で描かれる．(a')と(a")はグラフ同形である．

第 5 図は 2 つの地質体 x と y からなる露頭で，(a)と(b)は地質体 x が地質体 y を不整合に覆う例で，(c)は地質体 x と地質体 y が整合関係にある例である．露頭断面(a)，(b)，(c)に対応する層序グラフを(a')，(b')，(c')に示す



第５図　層序グラフの自形

図の地質体の記号が同じ場合は同じ地質体を表すものとする．露頭断面(a)と(b)は頂点のラベルと弧のラベルが同じ，すなわち

$\phi_V(x) \ni G_a = \phi_V(x) \ni G_b$
$\phi_V(y) \ni G_a = \phi_V(y) \ni G_b$
$\phi_A(x, y) \ni G_a = \phi_A(x, y) \ni G_b$

が成立しているので，G_a と G_b は自形になり，同一の自形グループに属する．

露頭断面(a)と(c)は接触関係の種類が異なるので，互いに自形ではない．

4．あとがき

２つの露頭の同一性についてグラフ理論を用いて検討した．構造グラフと層序グラフはともにラベル付き有向グラフなので，頂点の数，頂点のラベル，弧の向き，弧のラベルが問題になる．２つのグラフ間でこれらが対応していれば自形である．2 つの露頭を対比する場合，自形が問題となる．

露頭の対比には同一性だけでなく，ある露頭の構造(層序)が別の露頭の構造(層序)の一部であることがある．これは部分グラフに対応する．今後はこの問題について検討する必要がある．

文　献

Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (2008) *Graph Theory*. Springer, pp.79-81.

河西秀夫(2005) 個人用露頭データベースの設計について(3)－層序の表現方法の改善についてー．情報地質，vol.16, no.2, pp.57-68.

河西秀夫(2006) 個人用露頭データベースの設計について(4)－基盤，被覆層，互層の理論的背景－．情報地質, vol.17, no.1, pp.13-27.

Kasai, H.(2009) Design of geological exposure database -Structure graph: Mathematical model of geological structure of outcrops and regions based on graph theory-. *Geoinformatics*, vol.20, no.1, pp.17-29.

河西秀夫(2012)グラフ理論による露頭構造と層序の数学的表現．情報地質, vol.23, no.3, pp.109-120

河西秀夫(2013)グラフ理論による露頭構造と層序の数学的表現－貫入と断層の取り扱いー．情報地質, vol.24, no4., pp.161-173

Rainhard Disetel(2005) Graph Theory 3Rd ed. Springer

.Robin.J.Wilson(2010)Intoduction to Graph Theopy 5Ed,Peaeson Education,pp.18

W.T.Tuttle(2001) Graph Theory, Canbridge University Press,pp.2