

選鉱における単体分離状態の指標としての分散とエントロピー

正路 徹也

Variance and Entropy Indicating Degree of Liberation in Mineral Dressing Tetsuya Shoji*

* 東京大学 The University of Tokyo, Tokyo 113-8639, Japan.
E-mail: t-t_shoji@jcom.home.ne.jp

キーワード: 鉱石, 選鉱, 品位, 単体分離, 分散, エントロピー
Key words: Ore, Mineral processing, Grade, Liberation, Variance, Entropy

1. はじめに

金属鉱床の価値にとっては、対象である鉱石鉱物の含有量が最大の因子であるが、その鉱石鉱物を鉱石から分離するための選鉱特性も価値を決める重要な因子である。理想的に鉱石鉱物を分離するためには、選鉱粒子が鉱石鉱物のみで構成されている必要があり、そのために鉱石は粉碎される。この粒子の構成鉱物を鉱石鉱物のみにする過程を単体分離といい、全粒子の量に対する単体分離された粒子の量、すなわち、次の式(1)を単体分離度(degree of liberation = DoL) L という。

$$L = \frac{W_0 + W_G}{W} = \frac{W - W_M}{W} \quad (1)$$

ここで、 W_0 は鉱石鉱物(ore mineral)のみからなる粒子(以下単に鉱石粒子)、 W_G は脈石鉱物(gangue mineral)のみからなる粒子(脈石粒子)、 W_M は両鉱物を含む、すなわち片刃(middling)粒子、 $W = W_0 + W_M + W_G$ は全粒子の重量である。単純には粒子のサイズが小さいほど、鉱石粒子と脈石粒子(両者を合わせて単体粒子)が多くなって、単体分離度が高くなる。

単体分離の程度は、鉱石の強度などの岩石力学的性質に大きく依存するが、それはさらに構成鉱物である鉱石鉱物と脈石鉱物の種類および岩石組織に依存する。したがって、鉱床探査における地質学には、鉱石の岩石学的解析も含まれる。ここでは、そのための解析手法の開発の1つとして、MLA (= Mineral Liberation Analysis/Analyzer)で得られた銅鉱石の選鉱粒子の品位データを使って、単体分離度と鉱石鉱物含有率(以下、簡単のために品位)の粒子間でのバラツキとの関係を調べた結果を述べる。使用したデータは、正路(2017)で解析した銅鉱床から得られた8種の試料のうちの試料Aである。

2. 全粒子群の分散

選鉱粒子全体(bulk)のデータの分散 $V_B(x)$ は、粒子 i の品位を x_i 、重さを w_i とすると、次の式(2)で与えられる。

$$V_B(\bar{x}) = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 w_i}{\sum_i w_i} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 w_i}{W} \quad (2)$$

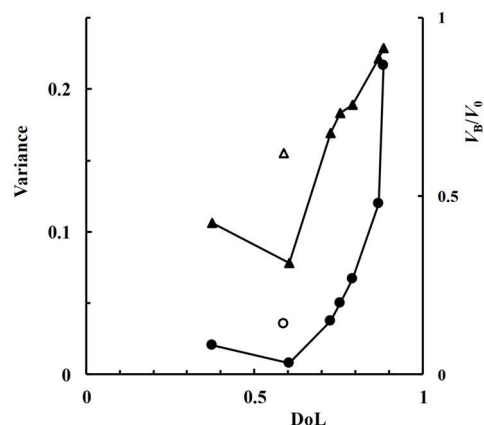
ここで、 $\bar{x} = \sum_i x_i w_i / \sum_i w_i$ は平均品位である。いま、単体分離が完全に行われたとすると、片刃粒子は存在せず鉱石粒子か脈石粒子しか存在しない。したがって、各粒子の品位 x_i は鉱石粒子ならば1、脈石粒子ならば0であり、式(2)は次の式(3)のように簡単になる。

$$V_0(\bar{x}) = \bar{x}(1 - \bar{x}) \quad (3)$$

ここで、添字がB0ではなく0としてあるのは、完全単体分離の状態での分散は、個々の粒子の品位には関係なく、全体の品位のみで決まるためである。

ところで、 $0 \leq x_i \leq 1$ であるから、 $x_i < \bar{x}$ ならば $(x_i - \bar{x})^2 < (0 - \bar{x})^2$ であり、 $x_i > \bar{x}$ ならば $(x_i - \bar{x})^2 > (0 - \bar{x})^2$ である。したがって、式(2)と(3)を比較したとき、必ず $V_B(\bar{x}) \leq V_0(\bar{x})$ である。つまり、この $V_0(\bar{x})$ は、分散が取りうる最大値を与える。そこで、以下では全粒子群の分散の最大期待値と呼ぶ。 $V_0(\bar{x})$ が取りうる分散の最大値であるということは、選鉱粒子の単体分離が進むにつれて、選鉱粒子の品位の分散は大きくなり、最終的に $V_0(\bar{x})$ に収束することを意味する。したがって、単体分離の程度を $V_B(\bar{x})/V_0(\bar{x})$ で評価することができる。

今回、解析の対象としたデータは、粉碎の一段階における選鉱粒子の個々の品位と粒径である。このため、粉碎過



第1図. 試料Aにおける単体分離度(DoL)と全粒子群の分散の関係。黒丸が分散(Variance)で左の軸、黒三角が分散比(V_B/V_0)で右の軸。塗りつぶしの各点は粒径の違いを表し、DoLの小さい方から、200-, 150-200, 106-150, 75-106, 45-75, 10-45, -10 μm 。白抜きは全粒子の値。

程における $V_B(\bar{x})/V_0(\bar{x})$ の変化を示すことはできない。そこで、第 1 図には、粒度で分けられた 7 種の粒子群に対する単体分離度と分散の関係を示した。両者は、明瞭な正の相関を示し、相関係数は DoL と $V_B(\bar{x})$ の間が 0.709、DoL と $V_B(\bar{x})/V_{B0}(\bar{x})$ の間が 0.846 である。

3. 個別粒子の分散およびエントロピーの平均

1 個の片刃粒子に着目すると、この粒子は、単体分離するためさらに粉砕され、最終的に単体粒子の集合となる。このとき、式(3)が成り立つ。このように考えると、その粒子の現在の品位から式(3)を用いて求められる分散は、その粒子の現在の片刃の程度を表しているといえる。そこで、式(3)を適用して個々の粒子の品位から分散を求め、次の式(4)で表されるそれらの重み付き平均を個別(individual)粒子の平均分散と定義する。

$$\bar{V}_i = \frac{\sum_i x_i(1-x_i)w_i}{\sum_i w_i} = \frac{\sum_i V(x_i)w_i}{W} \quad (4)$$

ここで、 \bar{V}_i は全粒子の平均品位とも個々の粒子の品位とも直接は関係しないので、関数関係を示す (x) は書いていない。単体粒子の場合、式(4)の $V(x_i)$ は、 x_i が 0 か 1 のため 0 である。したがって、すべての粒子が単体の場合、すなわち単体分離が完全になされた場合、 $\bar{V}_i = 0$ となる。このことは、単体分離が進行するにつれて、 \bar{V}_i は小さくなる、つまり $V_B(\bar{x})$ とは逆の傾向をとることを意味する。このことを示すために、第 2 図に単体分離度 DoL と個別の平均分散 \bar{V}_i および DoL と個別の分散比 V_i/V_0 の関係をプロットした。平均分散の値 \bar{V}_i は 0.015~0.028 と、全粒度範囲にわたってほとんど一定であるが、両者の相関係数は -0.693 と、明瞭に負の相関を示している。一方、DoL と分散比 V_i/V_0 の相関係数は -0.964 とさらに高い。

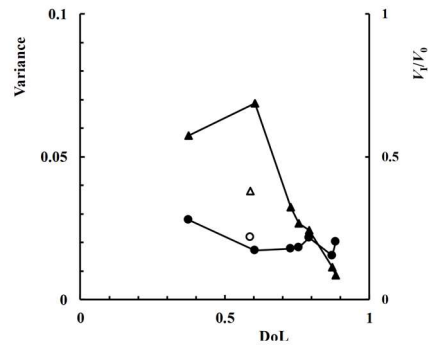
次に、全体の分散 V_B と個別の分散 \bar{V}_i 、および全体の分散比 V_B/V_0 と個別の分散比 V_i/V_0 の関係を見ると、DoL との場合と同様、前者は \bar{V}_i がほぼ一定であり、後者は負の相関を示している。相関係数は、前者が -0.166 で、後者が -1.000 である。前者がほとんど無相関で、後者が完全負相関である原因は同一の理由によると考えられる。その理由に関しては現在検討中である。

式(4)で与えられる個別粒子の平均分散は、正路(2018)が地球科学的調査の進行に伴うあいまいさの減少を定量化するために定義したセル分散とほぼ同じである。違いは平均を求めときの重みで、セル分散ではすべてのセルを同じとしているのに対し、個別粒子の分散は粒子の重量を重みとしている。正路(2018)はセル エントロピーも提案している。その概念を選鉱粒子に適用すると、次の式(5)が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{s}_i &= \frac{\sum_i -\{x_i \ln x_i + (1-x_i) \ln(1-x_i)\} w_i}{\sum_i w_i} \\ &= \frac{\sum_i s(x_i) w_i}{W} \end{aligned} \quad (5)$$

この \bar{s}_i をここでは個別粒子の平均エントロピーと呼ぶ。単体分離度 DoL と個別の平均エントロピー \bar{s}_i 、および DoL と個別の分散比 s_i/s_{B0} の相関係数は、前者が -0.817、後者が -0.896 である。

4. まとめと今後の課題



第 2 図. 試料 A における単体分離度(DoL)と個別粒子の平均分散の関係. 黒丸が分散値(Variance)で左の軸, 黒三角が分散比(V_i/V_0)で右の軸. 塗りつぶしの各点は粒径の違いを表し, DoL の小さい方から, 200-, 150-200, 106-150, 75-106, 45-75, 10-45, -10 μm . 白抜きは全粒子の値.

銅鉱山の選鉱粒子から得られた MLA データの銅鉱物含有量(品位)を使って、式(2)と(4)で与えられる 2 種類の分散を求め、以下の結論を得た。

- 1) 式(2)で与えられる全粒子群の分散 V_B は、単体分離度 DoL と正の相関を示すのに対し、式(4)で与えられる個別粒子の平均分散 \bar{V}_i は負の相関を示す。
- 2) V_B と \bar{V}_i はほとんど無相関である。一方、式(3)で与えられる全粒子群分散の最大期待値 V_0 で規格された V_B/V_0 と V_i/V_0 は完全負相関である。その理由は今後の検討課題である。
- 3) 個別粒子の平均分散と似た個別粒子の平均エントロピー \bar{s}_i も求めた。その性質は \bar{V}_i とほとんど同じである。

今回提案した全粒子群の分散 V_B 、個別粒子の平均分散 \bar{V}_i 、個別粒子の平均エントロピー \bar{s}_i が、選鉱粒子の単体分離状態の解析にどのように役立つかが現在のところ不明であり、今後この点に関する追及が必要である。特に、今回は単体粒子を含む粒子全体を計算の対象としたが、片刃粒子のみを対象とした解析が必要である。その最大の理由として、片刃粒子は定義として単体分離度が常に 0 のため、単体分離度で評価できないことが挙げられる。

謝辞: 解析の対象とした MLA データは、早稲田大学、創造理工学研究科の所研究室の堀内健吾博士(現 JOGMEC)に提供していただいた。記して感謝の意を表す。

引用文献

- 正路徹也(2017): 選鉱粒子の品位に対する統計分布の当てはめ. 情報地質, **28**(2), 82-85.
- 正路徹也(2018): 地球科学的調査の進行に伴う地球情報エントロピーと分散の減少. 情報地質, **29**(2), 61-75.