

発見された鉱床の選鉱特性の評価は地球情報学の役目

正路 徹也

Geoinformatics can contribute to assess mineral processing properties of discovered mineral deposits

Tetsuya Shoji*

* 東京大学 The University of Tokyo, Tokyo 113-8639, Japan.
E-mail: t-t_shoji@jcom.home.ne.jp

キーワード: 鉱石, 岩石学, 選鉱, 品位, 統計, 分布, ベータ

Key words: Ore, Petrography, Mineral processing, Grade, Statistics, Distribution, Beta

1. はじめに

新たに鉱床が発見された場合, その開発可能性の評価にとって, 鉱石の選鉱性は重要な因子の1つである. 鉱石の選鉱性は, 構成鉱物の種類と粒度, 各鉱物間の関係すなわち組織など, 岩石学的(厳密には鉱石岩石記載学的 ore petrographic)性質に依存する. この鉱石の岩石学的性質が明らかになると, 理想的選鉱が行われた場合の実収率および分離効率が推定できる.

ところで, 粗鉱すなわち選鉱における給鉱の品位が低下すると精鉱の品位も低下することは, 経験的に周知である. この経験則は, 選鉱粒子の選鉱特性が同じという簡単な仮定を設けることにより, 数学的に導かれることを第2章で示す. 第3章では, ①鉱石の岩石学的性質と②適用される分離条件で決まる選鉱特性のうち①に関して, 「選鉱特性が同じ」と仮定できる条件を, 選鉱粒子における鉱石鉱物含有率の統計分布の点から論じる. なお以下では, 慣習的用語法に従い, 鉱床に対しては「粗鉱 crude ore」, 選鉱過程では「給鉱 feed」を用いているが, ここでの両者は同じものを指す.

2. 粗鉱品位と精鉱品位

本章では, 鉱石の選鉱特性が同じならば, 給鉱(=粗鉱)品位が低下すると精鉱品位も低下することを, 物質収支に基づいて数学的に示す.

選鉱処理過程における鉱石種を給鉱 F , 精鉱 concentrate C , 尾鉱 tailing T に分け, それぞれの量を F, C, T で表す(第1表). また, 各鉱石における鉱石鉱物 O の含有率をそれぞれ f_o, c_o, t_o で表す(第1表). ここで, 通常金属元素の品位を使わず, 鉱石鉱物の含有率を使う理由は, ①含有率1で対象物が鉱石鉱物のみから成ることを明示できるためと, ②多金属鉱床など複数種の鉱石鉱物が存在する場合それらをまとめて扱えるためである. 各鉱石種を構成する粒子は3種類, すなわち鉱石粒子 ore particles (厳密には鉱石鉱物粒子 ore mineral particles) O , 片刃粒子 middling particles M , 脈石粒子 gangue particles (脈石鉱物粒子 gangue mineral particles) G に分け, それぞれを添字 O, M, G で表す(第2表: 表中ではそれぞれ鉱石, 片刃, 脈石と略記することがある). さらに, 第1表と第2表には, これらの鉱石種および粒子種間における鉱石量の物質収支も示してある. なお, 第2表で記号 \approx の右に記入してある近似は, 実際には定

義といえる. 片刃粒子では $0 < t_{MO} \leq f_{MO} \leq c_{MO} < 1$ が成り立つ. ここで, 等号すなわち $t_{MO} = f_{MO} = c_{MO}$ は, 給鉱が精鉱と尾鉱に分離されず分割された場合に当たる[注1].

選鉱の結果, 給鉱中の各粒子種は精鉱および尾鉱のそれぞれの粒子種に分けられる. このとき両者の間の量的関係を繋ぐ係数を分配率と呼ぶ. なお, 個々の粒子の種類は移動元と移動先で変わらないと仮定する. すなわち, 鉱石粒子から片刃粒子などへの移動は起こらない[注2]. 分配率は D で表し, 移動元と移動先はそれぞれ上付き添字の左と右で表し, 鉱石粒子, 片刃粒子, 脈石粒子をそれぞれ下付き添字 O, M, G で表す. 例えば, $D_o^{FC} = C_o/F_o$ は, 給鉱中の鉱石粒子の量が F_o で, そのうち精鉱中の鉱石粒子に移った量が C_o であり, 両者の比が D_o^{FC} であることを示す(第3表). 第3表で記号 \approx の右に記入してある近似が成り立つと, 第2表で記号 \approx の右に記入してある近似が得られる.

ところで, 第1表と第2表に示されている変数のうち, 全給鉱量 F を一定とした場合, 独立な変数である給鉱の鉱石粒子の量 F_o , 片刃粒子の量 F_M , 脈石粒子の量 F_G , および各粒子種の品位($f_{oo}, f_{Mo}, f_{Go}, c_{oo}, c_{Mo}, c_{Go}, t_{oo}, t_{Mo}, f_{Go}$)は鉱石の岩石学的性質で決まり, 第3表に示されている分配率は分離条件で決まる. なお, 精鉱中の鉱石粒子の量 C_o , 片刃粒子の量 C_M , 脈石粒子の量 C_G , および尾鉱中の鉱石粒子の量 T_o , 片刃粒子の量 T_M , 脈石粒子の量 T_G は, 第3表に示すように, 分配率で精鉱中の各粒子種の量と結びつけられている. なお, 個々の粒子の種類は移動元と移動先で変わらないという仮定から, 例えば $f_{Mo} = c_{Mo} = t_{Mo}$ を導くことはできない. なぜならば, 給鉱中の片刃粒子のうち, より鉱石粒子に富む粒子が精鉱に, より脈石鉱物に富む粒子が尾鉱に入りやすいかもしれない.

鉱石と鉱石鉱物の物質収支は, それぞれ次の式(1)と(2)で表される.

$$F = C + T \quad (1)$$

$$f_o F = c_o C + t_o T \quad (2)$$

式(2)より, 精鉱中の鉱物の含有率 c_o は次の式(3)で与えられる.

$$c_o = \frac{f_o F - t_o T}{C}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_o F - (t_{oo} T_o + t_{mo} T_m + t_{go} T_g)}{C_o + C_m + C_g} \\
&= \frac{f_o F - (t_{oo} D_o^{FT} F_o + t_{mo} D_m^{FT} F_m + t_{go} D_g^{FT} F_g)}{D_o^{FC} F_o + D_m^{FC} F_m + D_g^{FC} F_g} \quad (3)
\end{aligned}$$

ここで、尾鉱中の脈石粒子は鉱石鉱物を含まないで
 $t_{go} = 0$ であり、給鉱中の鉱石粒子はすべて精鉱へ移り
 $(D_{oo}^{FC} = 1)$ 、給鉱から尾鉱へ移る鉱石粒子および精鉱へ移る
脈石粒子は皆無 $(D_o^{FT} = D_g^{FC} = 0)$ だと仮定すると、次の式(4)
が得られる。

$$c_o = \frac{f_o F - t_{mo} D_m^{FT} F_m}{F_o + D_m^{FC} F_m} \quad (4)$$

式(4)で $F^* = F/F$ 、 $F_o^* = F_o/F$ として、 F と F_o を置き換えて
次の式(4)'を導くと、給鉱 1 t 当たりの場合が表現できる
 $(F^* = 1)$ であるが、式には残しておく。

$$c_o = \frac{f_o F^* - t_{mo} D_m^{FT} F_m^*}{F_o^* + D_m^{FC} F_m^*} \quad (4)'$$

上の式(4)あるいは(4)'で分子の第2項および分母の第2項は、
ともに F_m あるいは F_m^* を含むことから明らかなように、片
刃の存在による。もし片刃が存在しない、すなわち
 $F_m = F_m^* = 0$ だと、次の式(5)が得られる。

$$c_o = \frac{f_o F}{F_o} = \frac{f_o F^*}{F_o^*} \quad (5)$$

上の式(5)の分子は精鉱中の鉱石鉱物の全量であり、式が
 $c_o F_o = f_o F$ あるいは $c_o F_o^* = f_o F^*$ とも書けるように、それ
がすべて精鉱の鉱石粒子に移ったことを意味している。したがって、
給鉱品位 f_o が低下しても、その分だけ鉱石粒子
の量 F_o^* ($= F_o/F$) が小さくなって、 $c_o = c_{oo} = 1$ (精鉱は鉱石
粒子のみ) が得られるはずである。これに対し、片刃粒子が
存在すると、式(4)における片刃の項の影響がでる。分子の
第2項は片刃として尾鉱に逃げた鉱石鉱物の量を表しており、
精鉱の品位を低下させる。分母の第2項は、片刃として存在する
脈石鉱物の量を表しており、こちらも精鉱品位
を低下させる。ところで、 $f_o F = f_{oo} F_o + f_{mo} F_m + f_{go} F_g$
であるから、 $f_{oo} \approx 1$ および $f_{go} \approx 0$ であることを考慮すると、

$$\begin{aligned}
F_o^* &= \frac{f_o - f_{mo} F_m^* - f_{go} F_g^*}{f_{oo}} \\
&\approx f_o - f_{mo} F_m^*
\end{aligned}$$

である。これを式(4)'に代入すると、次の式(6)が得られる。

$$\begin{aligned}
c_o &= \frac{f_o F^* - t_{mo} D_m^{FT} F_m^*}{f_o - f_{mo} F_m^* + D_m^{FC} F_m^*} \\
&= \frac{f_o F^* - t_{mo} D_m^{FT} F_m^*}{f_o - (f_{mo} - D_m^{FC}) F_m^*} \quad (6)
\end{aligned}$$

上述のように、式(4)から、片刃粒子の存在が精鉱品位を
下げる原因であることが分かった。その低下の傾向をより
定量的に把握するために、式(6)を f_o で微分する。ただし、
鉱石の岩石学的性質と操業条件が同じならば f_{mo} 、 t_{mo} 、
 D_m^{FC} 、 D_m^{FT} ($= 1 - D_m^{FC}$)、 $F_m^* = F_m/F$ は変わらないと仮定、
すなわち微分では定数とみなす。微分の結果、次の式(7)が
得られる。

$$\frac{dc_o}{df_o} = \frac{F^* \{f_o - (f_{mo} - D_m^{FC}) F_m^*\} - (f_o F^* - t_{mo} D_m^{FT} F_m^*)}{\{f_o - (f_{mo} - D_m^{FC}) F_m^*\}^2}$$

$$= \frac{\{D_m^{FC} - f_{mo}\} F^* + t_{mo} D_m^{FT} F_m^*}{\{f_o - (f_{mo} - D_m^{FC}) F_m^*\}^2} \quad (7)$$

さらに、 $D_m^{FC} + D_m^{FT} = 1$ であることを考慮すると、次の式(7)'
が導かれる。

$$\begin{aligned}
\frac{dc_o}{df_o} &= \frac{\{D_m^{FC} - f_{mo}\} F^* + t_{mo} (1 - D_m^{FC}) F_m^*}{\{f_o - (f_{mo} - D_m^{FC}) F_m^*\}^2} \\
&= \frac{\{D_m^{FC} (F^* - t_{mo}) - (f_{mo} F^* - t_{mo})\} F_m^*}{(f_o - f_{mo} F_m^* + D_m^{FC} F_m^*)^2} \quad (7)'
\end{aligned}$$

$F^* = 1$ であるから、式(7)'
の分子は片刃粒子の量 (F_m^*)、給
鉱と精鉱中の片刃粒子の鉱石鉱物の含有率(それぞれ f_{mo}
と t_{mo})、および片刃粒子の給鉱から精鉱への分配率 (D_m^{FC})
からなる。微分のために導入したこれらの値が選鉱の操業
条件で決まり、条件が同じ場合、給鉱品位に関係なく、ほ
とんど変化しないという仮定により、式(7)'
の分子の値は給鉱品位に関係なく一定となる。したがって、
その値が正ならば、分母は常に正なので、精鉱品位 c_o は給
鉱品位 f_o の増加とともに増加する。逆に給鉱品位が下
がると精鉱品位も下がる。すなわち、給鉱品位 f_o と精
鉱品位 c_o は正相関するか負相関するかは、式(7)'
の分子の中括弧内の正負で決まる。そこで、その部分を
次の式(8)のように $H = H(f_{mo}, t_{mo}, D_m^{FC})$
で表す。

$$\begin{aligned}
H &= H(f_{mo}, t_{mo}, D_m^{FC}) \\
&= D_m^{FC} (F^* - t_{mo}) - (f_{mo} F^* - t_{mo}) \\
&= D_m^{FC} (1 - t_{mo}) - (f_{mo} - t_{mo}) \quad \because F^* = 1 \quad (8)
\end{aligned}$$

ところで、片刃粒子の給鉱、精鉱、尾鉱間での質量収支
を考えると、尾鉱に入った片刃粒子の鉱石鉱物の含有率
 t_{mo} は次の式(9)で与えられる(付1)。

$$t_{mo} = \frac{f_{mo} - c_{mo} D_m^{FC}}{1 - D_m^{FC}} \quad (9)$$

この式(9)を式(8)に代入すると、次の式(8)'が得られる。

$$\begin{aligned}
H &= t_{mo} (1 - D_m^{FC}) - (f_{mo} - D_m^{FC}) \\
&= (f_{mo} - c_{mo} D_m^{FC}) - (f_{mo} - D_m^{FC}) \\
&= (1 - c_{mo}) D_m^{FC} \quad (8)'
\end{aligned}$$

式(8)'において、常に $c_{mo} \leq 1$ すなわち $1 - c_{mo} \geq 0$ であるから、
常に $H > 0$ である。したがって、選鉱条件が同じ、すな
わち給鉱、精鉱、尾鉱を構成する鉱石粒子、片刃粒子、脈
石粒子の鉱石鉱物の含有率(それぞれ、 f_{oo} 、 f_{mo} 、 f_{go} 、 c_{oo} 、
 c_{mo} 、 c_{go} 、 t_{oo} 、 t_{mo} 、 t_{go})、および鉱石粒子、片刃粒子、
脈石粒子の給鉱から精鉱と尾鉱への分配率(それぞれ、 D_o^{FC} 、
 D_m^{FC} 、 D_g^{FC} 、 D_o^{FT} 、 D_m^{FT} 、 D_g^{FT})が同じ場合、給
鉱品位 f_o と精鉱品位 c_o は必ず正相関する。別言すると、
給鉱(粗鉱)品位が低下すると、精鉱品位も低下する。

3. 鉱石における鉱石鉱物含有率の統計分布

前章で、鉱石の選鉱特性が同じならば、給鉱(=粗鉱)品位
が低下すると精鉱品位も低下することを示した。この章で
は、「鉱石の選鉱特性が同じ」を鉱石鉱物含有率の統計分布
の視点から論じる。

選鉱では片刃粒子の量を少なくするために鉱石が粉碎さ
れ、片刃粒子が皆無すなわち粒子はすべて鉱石粒子か脈石
粒子である場合が理想状態である。この理想状態に近づく
に従って、全粒子の鉱石鉱物含有率は、0 および 1 付近が

多く、中間が少ない統計分布曲線を描くはずである。そのような形状を示す分布として、次の式(10)で定義されるベータ分布がある。

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \quad (10)$$

ここで、 x は区間(0,1)で定義される確率変数(鉱石鉱物含有率)、 $f(x)$ は確率密度関数、 α と β は正の定数、 $B(\alpha, \beta)$ は次の式(11)で定義されるベータ関数である。

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1} d\xi \quad (11)$$

ベータ分布の累積頻度 $F(x)$ は、次の式(12)のように、式(10)の0から x までの不定積分で与えられる。

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi \quad (12)$$

第1図に、式(12)で与えられるベータ分布を右上がりの線群で示す。なお、ベータ分布の平均 μ と分散 V はそれぞれ次の式(13)と(14)で与えられる。

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (13)$$

$$V = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (14)$$

ベータ分布の適用例として、式(13)と(14)の関係を利用して平均 μ と分散 V から α と β を求めた Matos et al. (2004)の研究がある(論文では“incomplete Beta function”としているが、実際に記述されている式は“Beta function”)。彼らは、石英、曹長石、微斜長石、白雲母の混合試料を対象に、300~212 μm から 37~ μm までの7つの各粒度範囲について、石英、曹長石、微斜長石の実際の品位分布とベータ分布で近似される品位分布を比較し、5%水準のKolmogorov-Smirnov 検定でベータ分布に従うという仮説は承認されないと結論した。Matos et al. (2004)は、当てはめの結果を微分型(棒グラフ)で示して、実測値と当てはめ値を比較している。しかし、これでは当てはめ精度を視覚的に認識しにくいので、今回は累積型で計算して図示した。その結果は、当然のことながら特記すべき違いが認められなかった。これ以上は言及しない。

前章で、選鉱粒子は鉱石粒子、片刃粒子、脈石粒子の3種に分けられると述べた。したがって、含有率 $x=0$ における頻度 $F(0)$ が脈石粒子の量に対応して0より大きく、含有率 $x=1$ における頻度 $F(1)$ は鉱石粒子の量に対応して1より小さくなる可能性がある。ただし、観察に基づいて行われる分類では、脈石鉱物が見られない粒子は鉱石粒子に、鉱石鉱物が見られない粒子は脈石粒子に分類されるため、分類上の鉱石粒子に脈石鉱物が、脈石粒子に鉱石鉱物が含まれている可能性がある。そこで、Spencer and Southerland (2000)は、オーストラリアの鉛亜鉛鉱床産鉱石を試料として、QEMSCAN による2次元計測で得られた選鉱粒子の鉱物含有率を、(A)変換カーネル法、および(B) Euler 積分と(C) Simpson の公式により推定される Delesse の立体解析学的定理 stereological theorem を用いて補正し、3次元での含有率を推定した。

以下では、Spencer and Southerland (2000)のデータを使ってベータ分布を当てはめた結果を述べる。なお、当てはめでは、 $F(0)$ と $F(1)$ がそれぞれ脈石粒子と鉱石粒子の量を表しているとして、次の式(15)でそれらの量を除いた $F'(x)$ を用いた。

$$F'(x) = \frac{F(x) - F(0)}{F(1) - F(0)} \quad (15)$$

したがって、式(15)の $F'(x)$ は片刃粒子における鉱物含有率の累積頻度を示す。式(12)を当てはめられて得られた結果は、式(15)の逆変換を行ったのち、元のデータと比較した。それらの結果のうち、給鉱と精鉱で3次元への補正がなされていないデータに、式(13)と(14)を使って当てはめた結果を第2図に示す。この場合の実測頻度と推定頻度の差の二乗平均は、給鉱が $0.038 \cdot 10^{-2}$ 、精鉱が $0.015 \cdot 10^{-2}$ であった。

前述したように、鉱石粒子と脈石粒子にはそれぞれ脈石鉱物と鉱石鉱物が含まれている可能性がある。そこで、 $F(0)$ および $F(1)$ の値を試行錯誤で変える最小二乗法を適用して、ベータ分布の当てはめを行った。その結果、給鉱の実測頻度と推定頻度の差の二乗平均は、 $F(0)$ が実測値で $F(1)$ が実測値より1に近づいて、 $0.011 \cdot 10^{-2}$ と小さくなった。一方、精鉱は、 $F(0)$ も $F(1)$ も実測値と変わらず、 $0.015 \cdot 10^{-2}$ であった。

別の関数として、次の式(16)を用いる当てはめも行った。

$$F(x) = \frac{x^{1/\lambda}(1-y_0)}{(1-x)^{1/\lambda}y_0 + x^{1/\lambda}(1-y_0)} \quad (16)$$

ここで、 λ と y_0 は定数である。第1図には、ベータ分布を表す線群と区別しやすいように、 $G(x) = 1 - F(x)$ と変換して得られる $G(x)$ で示してある(右下がりの線群)。式(16)は次の式(17)のように書き換えられる(付2)。

$$\log\left(\frac{1-F(x)}{F(x)}\right) = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{1-x}{x}\right) + \log\left(\frac{y_0}{1-y_0}\right) \quad (17)$$

そこで、 $X = \log\{(1-x)/x\}$ 、 $Y = \log\{F(x)/(1-F(x))\}$ と置くと、次の式(18)のように書ける。

$$Y = AX + B \quad (18)$$

横軸に X 、縦軸に Y をとって、選鉱粒子の鉱石鉱物含有率と累積頻度の関係を図示したとき、 A を傾き B を切片とする直線で近似できると、式(17)の λ と y_0 は次式から得られる(付2)。

$$\lambda = \frac{1}{A}$$

$$y_0 = \frac{10^B}{10^B + 1}$$

Spencer and Southerland (2000)のデータに式(16)を適用したところ、実測頻度と推定頻度の差の二乗平均は、給鉱が $1.2 \cdot 10^{-2}$ 、精鉱が $14.3 \cdot 10^{-2}$ であった(第2図)。式(10)に較べて式(16)による当てはめの精度が著しく悪くなったのは、 x および $F(x)$ が0あるいは1に近い範囲、すなわち X および Y の絶対値が大きい範囲では、それぞれ $\log\{(1-x)/x\}$ および $\log\{1-F(x)/F(x)\}$ という変換により誤差が拡大され、回帰直線はこれらの範囲での誤差が小さくなるように計算された結果、中間部での誤差が相対的に大きくなったためと考えられる。ただし、第2図で見る限り、実測頻度と推定頻度の差の二乗平均の違いは認識できない。

当てはめの精度の検討はともかく、式(10)で与えられるベータ分布あるいは式(16)で与えられる分布を使って、選鉱粒子における鉱石鉱物含有率の統計的性質をある程度記述できることが分かった。そして、ベータ分布の α と β 、あるいは式(16)の λ と y_0 によって選鉱粒子の選鉱特性が評価できると期待される。別言すると、粒度分布が同じで、これらの定数の値も同じなら、選鉱特性も同じであることが期待される。

4. まとめと今後の課題

発見された鉱床の価値は、その規模および対象鉱物の含

有率のみならず、選鉱の難易度の関数でもある。給鉱(=粗鉱)と精鉱および尾鉱の間の物質収支に基づく計算において、「鉱石の選鉱特性が同じ」という仮定を設けると、粗鉱品位が下がると精鉱品位も下がるという経験則が数学的に証明される。選鉱の難易度の測定、あるいは「鉱石の選鉱特性が同じ」という仮定の成否の判定は、選鉱粒子の鉱石鉱物含有率の統計分布モデルに基づくといふ。そのための準備として、ベータ分布、およびそれと似た形状で線形の回帰直線が得られる式(16)の当てはめを試みた。

選鉱粒子は、鉱石粒子、片刃粒子、脈石粒子の集合体である。精鉱品位が低下すると鉱石粒子の量が少なくなる。しかし精鉱が鉱石粒子のみからなると精鉱品位は低下しない。低下するのは、混入した片刃粒子の量が鉱石粒子の量に較べて相対的に多くなるためである。ここまでをまとめ、①鉱石の岩石学的性質と適用される選鉱条件が同じで、粗鉱1t当たりの片刃粒子の量が一定と仮定できるなら、粗鉱品位が低下すると精鉱品位も低下し、②片刃粒子の統計的品位分布特性はベータ分布などを適用して評価できる。

次に、以上の結果明らかになった今後の課題について述べる。今回の当てはめで利用したMatos et al. (2004)のデータは石英や長石など岩石の主要構成鉱物であり、Spencer and Southerland (2000)のデータも給鉱の平均品位が16%と高い[注3]ことから、これまでの岩石を構成する主要元素の濃度分布に関する知識に基づく、その品位はほぼ正規分布で近似できると考えられる。一方、金や白金の鉱床の品位分布は通常対数正規分布に従う。また、銅や鉛などのベース金属の品位分布は、正規確率紙では低品位側に、対数正規分布では高品位側にずれる傾向がある。このような鉱石に対して今回の議論が成立するのであろうか?

そもそもここまで述べてきた議論は、片刃粒子における統計的品位分布と給鉱における統計的品位分布を混同しているからいがある。後者は、鉱石粒子の品位分布、片刃粒子の品位分布、脈石粒子の品位分布の和集合である。定義によると、鉱石粒子は鉱石鉱物のみからなるので、その品位は鉱石鉱物の金属含有率に一致し、脈石粒子は鉱石鉱物を含まないで、その品位は0である。したがって、給鉱(=粗鉱)における統計的品位分布は、全体に対して統計モデルを当てはめるのではなく、①鉱石粒子、片刃粒子、脈石粒子それぞれの量を知った上で、②片刃粒子における統計的品位分布を調べるべきであろう。片刃粒子は鉱石鉱物と脈石鉱物の集合体である。とすると、鉱石鉱物の含有率は二項分布で近似できるのであろうか? もしそうなら、正規分布で近似できて、ベータ分布では近似できないように思える。

鉱石粒子および脈石粒子に分類された粒子に対しては、それぞれ真に鉱石粒子か、真に脈石粒子かという疑問が生じる。この疑問に答えるためには、例えば、前述したSpencer and Southerland (2000)の試み、すなわちQEMSCANで得られたデータから品位ごとに分けられた粒子群の真の鉱物含有率を推定するなどの研究が必要である。この種の研究は、鉱石岩石記載学の課題である。また、表面情報から内部情報を推定する課題は地球情報学の重要な分野である。

最後にもう1つ重要な点がある。仮に選鉱粒子あるいは片刃粒子における統計的品位分布がベータ分布で近似できるとして、その定数 α と β は粒度分布に依存する。すなわち、対象粒子の粒度分布と品位分布との関係を一体として検討しなければならない。その解明のためには多くの事例が必要である。ところが、鉱床の品位に関するデータは経済性

に関係するためほとんど公表されない。しかし、資源を効率よく開発するためには、品位に関するデータが可能な限り公表されて、多くの研究者にとって利用可能であることが望まれる。さらに、効率的な資源開発は環境保全にも繋がることを忘れてはならない。

謝辞 「粗鉱品位が低下すると精鉱品位が低下する」という課題は、日本メタル経済研究所の中村簾氏に教わった。また、早稲田大学、環境資源工学科の所千晴教授と石油天然ガス・金属鉱物資源機構の大坪泰典氏には、第2章の式をチェックしていただいた。記してこれらの方々への感謝の意を表す。

付記 式(16)が式(17)のように線形の式に変換できたのに対し、ベータ分布は線形の式に変換することはできない。しかし、MS-ExcelにはBETA.DISTという組込み関数が用意されている。

引用文献

- Matos, M.J.; Gonçalves, J.H.; Marto, M.H. (2004) Testing incomplete Beta function to describe composition of real unliberated particles. *Mineral Proc. Extractive Metallur.* (Trans. IMM. C), **113**, C121-C128.
- Spencer, S.; Southerland, D. (2000) Stereological correction of mineral liberation grade distributions estimated by single sectioning of particles. *Image Ana.l Stereol.*, **19**, 175-182.

注1: 分割である以上、 $t_{MO} > f_{MO} > c_{MO}$ となる可能性はある。しかし、選鉱粒子は数多くあり、誤差範囲内で $t_{MO} = f_{MO} = c_{MO}$ のはずである。また、もし $t_{MO} > f_{MO} > c_{MO}$ となったとすると、そもそも何のために選鉱をしているのか分からない。

注2: 実際には、精鉱と尾鉱それぞれについて個々の粒子を鉱石粒子、片刃粒子、脈石粒子のいずれかに分類し、それらの供給元が精鉱だと考えればよい。

注3: 鉛亜鉛鉱床としては極めて高い。

付1. 式(9)の導出

片刃粒子中の鉱石鉱物の量の給鉱、精鉱、尾鉱の間における質量収支は、次の式(A1)で与えられる。

$$f_{MO}F_M = c_{MO}C_M + t_{MO}T_M \quad (A1)$$

また、精鉱と尾鉱中における片刃粒子の量は、分配率を使うと、それぞれ次の式(A2)と(A3)で表せる。

$$C_M = D_M^{FC}F_M \quad (A2)$$

$$T_M = D_M^{FT}F_M = (1 - D_M^{FC})F_M \quad (A3)$$

式(A1)に式(A2)と(A3)を代入した上で、尾鉱中の片刃粒子における鉱石鉱物の含有率を求めると、次のように式(9)が得られる。

$$f_{MO}F_M = c_{MO}D_M^{FC}F_M + t_{MO}(1 - D_M^{FC})F_M$$

$$t_{MO} = \frac{f_{MO} - c_{MO}D_M^{FC}}{1 - D_M^{FC}} \quad (9)$$

付2. 式(17)の導出

式(16)を次のように変形する。

$$F(x) = \frac{x^{1/2}(1-y_0)}{(1-x)^{1/2}y_0 + x^{1/2}(1-y_0)}$$

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{(1-x)^{1/\lambda} y_0 + x^{1/\lambda} (1-y_0)}{x^{1/\lambda} (1-y_0)}$$

$$= \frac{(1-x)^{1/\lambda} y_0}{x^{1/\lambda} (1-y_0)} + 1$$

$$\frac{1}{F(x)} - 1 = \left\{ \frac{1-x}{x} \right\}^{1/\lambda} \frac{y_0}{1-y_0}$$

$$\log\left(\frac{1-F(x)}{F(x)}\right) = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{1-x}{x}\right) + \log\left(\frac{y_0}{1-y_0}\right) \quad (17)$$

ここで、

$$Y = \log\left\{\frac{1-F(x)}{F(x)}\right\}$$

$$X = \log\left\{\frac{1-x}{x}\right\}$$

$$A = \frac{1}{\lambda}$$

$$B = \log\left\{\frac{y_0}{1-y_0}\right\}$$

とすると、式(18)が得られる。

$$Y = AX + B \quad (18)$$

上式で X と Y が直線関係にあると、 λ と y_0 は A と B から次のように導かれる

$$\lambda = \frac{1}{A}$$

$$10^B = \frac{y_0}{1-y_0}$$

$$\frac{1}{10^B} = \frac{1-y_0}{y_0} = \frac{1}{y_0} - 1$$

$$y_0 = \frac{10^B}{10^B + 1}$$

第1第3表種の鉱石種(給鉱, 精鉱, 尾鉱)の定義とそれらの間の質量保存, および鉱石鉱物/脈石鉱物の含有率.

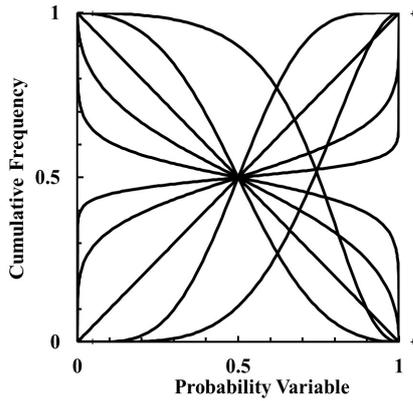
鉱石種	重量	鉱石鉱物の含有率	脈石鉱物の含有率	制約条件
給鉱	$F = F_0 + F_M + F_G$	$f_0 = (f_{00}F_0 + f_{M0}F_M + f_{G0}F_G)/F$	$f_G = (f_{0G}F_0 + f_{MG}F_M + f_{GG}F_G)/F$	$f_0 + f_G = 1$
精鉱	$C = C_0 + C_M + C_G$	$c_0 = (c_{00}C_0 + c_{M0}C_M + c_{G0}C_G)/C$	$c_G = (c_{0G}C_0 + c_{MG}C_M + c_{GG}C_G)/C$	$c_0 + c_G = 1$
尾鉱	$T = T_0 + T_M + T_G$	$t_0 = (t_{00}T_0 + t_{M0}T_M + t_{G0}T_G)/T$	$t_G = (t_{0G}T_0 + t_{MG}T_M + t_{GG}T_G)/T$	$t_0 + t_G = 1$
関係式	$F = C + T$	$f_0F = c_0C + t_0T$	$f_GF = c_GC + t_GT$	

第2表. 各鉱石種を構成する3種の粒子種(鉱石鉱物, 片刃, 脈石鉱物)の定義とそれら間の質量保存, および鉱石鉱物/脈石鉱物の含有率.

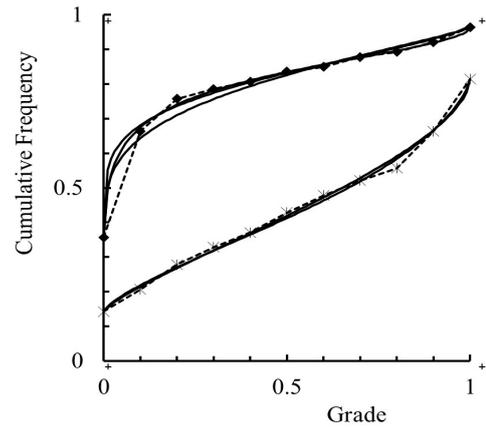
鉱石種	粒子種	重量	鉱石鉱物/脈石鉱物の含有率	制約条件
給鉱	鉱石	$F_0 = C_0 + T_0$	$f_{00} = (c_{00}C_0 + t_{00}T_0)/F_0 \approx 1$ $f_{0G} = (c_{0G}C_0 + t_{0G}T_0)/F_0 \approx 0$	$f_{00} + f_{0G} = 1$
	片刃	$F_M = C_M + T_M$	$f_{M0} = (c_{M0}C_M + t_{M0}T_M)/F_M$ $f_{MG} = (c_{MG}C_M + t_{MG}T_M)/F_M$	$c_{M0} + c_{MG} = 1$
	脈石	$F_G = C_G + T_G$	$f_{G0} = (c_{G0}C_G + t_{G0}T_G)/F_G \approx 0$ $f_{GG} = (c_{GG}C_G + t_{GG}T_G)/F_G \approx 1$	$t_{G0} + t_{GG} = 1$
精鉱	鉱石	$C_0 \approx F_0$	$c_{00} \approx 1$ $c_{0G} \approx 0$	
	片刃	C_M	c_{M0} c_{MG}	
	脈石	$C_G \approx 0$	$c_{G0} \approx 0$ $c_{GG} \approx 1$	
尾鉱	鉱石	$T_0 \approx 0$	$t_{00} \approx 1$ $t_{0G} \approx 0$	
	片刃	T_M	t_{M0} t_{MG}	
	脈石	$T_G \approx F_G$	$t_{G0} \approx 0$ $t_{GG} \approx 1$	

第3表. 給鉱から精鉱および尾鉱への各粒子種における移行の分配比.

鉱石種	粒子種	給鉱			分配比	
		鉱石	片刃	脈石		
		重量	$F_0 = C_0 + T_0$	$F_M = C_M + T_M$	$F_G = C_G + T_G$	
精鉱	鉱石	C_0	$C_0 = D_{00}^{FC} F_0 \approx F_0$			$D_{00}^{FC} = C_0/F_0 \approx 1$
	片刃	C_M		$C_M = D_{M0}^{FC} F_M$		$D_{M0}^{FC} = C_M/F_M$
	脈石	C_G			$C_G = D_{G0}^{FC} F_G \approx 0$	$D_{G0}^{FC} = C_G/F_G \approx 0$
尾鉱	鉱石	T_0	$T_0 = D_{00}^{FT} F_0 \approx 0$			$D_{00}^{FT} = T_0/F_0 \approx 0$
	片刃	T_M		$T_M = D_{MG}^{FT} F_M$		$D_{MG}^{FT} = T_M/F_M$
	脈石	T_G			$T_G = D_{GG}^{FT} F_G \approx F_G$	$D_{GG}^{FT} = T_G/F_G \approx 1$



第1図. ベータ分布と式(16)で与えられる分布の確率変数と累積頻度の関係. ベータ分布 (右上がりの線群)の定数 (α, β) : 縦軸の値が 0.5 以下で左から右へ $(0.05, 0.05)$, $(0.2, 0.2)$, $(1, 1)$, $(5, 5)$, $(5, 2)$. 式(16) (右下がりの線群)の定数 (r, y_0) : 縦軸の値が 0.5 以上で左から右へ $(5, 0.5)$, $(2, 0.5)$, $(1, 0.5)$, $(0.5, 0.5)$, $(0.5, 0.9)$.



第2図. Spencer and Southerland (2000)のデータにベータ分布と式(16)を当てはめた結果. 上が給鉱, 下が精鉱. 点線で結ばれたマークが実測値. 上の給鉱に当てはめられた3本の曲線が分かれて見える低品位部で, 左から 1) $F(0)$ と $F(1)$ を最小二乗法で求めたベータ分布($F(0)$ は実測値に一致), 2) 式(16), 3) $F(0)$ と $F(1)$ を実測値としたベータ分布.