

# 層序グラフによる地域層序の演算

河西秀夫\*

## The operation of Local Stratigraphy with Stratigraphic graphs

Hideo KASAI\*

\* 山梨学院大学, Yamanashi Gakuin University, Sakaori2-4-5.Koufu city, Yamanashi Prefecture 400-8575, Japan,  
E-mail [kasai@ygu.ac.jp](mailto:kasai@ygu.ac.jp)

キーワード: グラフ理論, 層序グラフ, 層序式, 演算

Key words: Graph theory, Stratigraphic graph, Stratigraphic formula, Operation

### 1. 始めに

著者は露頭データベースの設計にあたり, 露頭でみられる地質構造や層序の記述方法としてラベル付き有向グラフを使用した構造グラフと層序グラフを提案した(河西, 2003, 2005 ;Kasai, 2009; 河西 2012, 2015, 2016). グラフの頂点のラベルは地層名, 弧のラベルは地層間の接触関係である.

露頭データベースに必要な機能の1つに, 露頭の層序から識別される層序を複数組み合わせる, ある一定の地域の層序を求める機能がある. この場合, 基本的には2つの露頭の層序の組み合わせの方法が検討される. この組み合わせを層序の演算と称する. 河西(2003)は層序グラフの演算の可能性を検討した.この検討をさらに進めて, 層序の演算の基本的な原理を層序グラフを使用して検討した. 地層が逆転している層序の場合は逆転以前の層序に戻して検討した.

今回は層序グラフの演算の方法とこの演算結果を報告する.

### 2. 構造グラフと層序グラフ

露頭で識別される地質構造に対して, 下で定義するような  $V, R^{\#}, \phi_v, \phi_A$  で定義される有向グラフ

$$G=(V, R^{\#}, \phi_v, \phi_A)$$

を「構造グラフ」と呼ぶ(河西, 2013, 河西 2015). 構造グラフは露頭で識別される露頭構造をグラフで表現したものである.

1つの露頭で識別された地質体の集合  $V$  の元である2つの地質体  $x$  と  $y$  の関係を  $xR^{\#}y$  と書く.

$$R^{\#}=\{(x, y) \mid xRy \vee xLy \vee xFy \vee xTy, x \in V, y \in V\}$$

$$R^{\#} \leftrightarrow R \vee xLy \vee xDy$$

$xRy$  は空間的な上下関係であり,  $x$  が空間的に下側にある.  $xR^{\#}y$  は空間的な上下関係  $xRy$ , 貫入関係  $xLy$ , 断層関係  $xFy$ , 包含関係  $xLy$ , 同時異相  $xDy$  を統一的に表現したものである.  $\phi_v$  は  $V$  の元である各地質体に地層名を対応付ける写像である.  $x$  や  $y$  は地質体を区別する記号であり,  $\phi_v(x)$  や  $\phi_v(y)$  が地質体の名称である.  $xR^{\#}y$  である  $x$  と  $y$  の接触関係の名称を  $\phi_A(x, y)$  と書く.  $\phi_A$  は順

序対  $(x, y)$  に接触関係の名称の集合  $A$ =(整合, 不整合, 貫入, 断層, 包含, 同時異相, 逆転)の1つの元を対応つける写像  $\phi_A: R \rightarrow A$  である.

層序グラフは露頭における地質体の新旧関係を表したラベル付き有向グラフであり, 以下のように定義される集合  $V$  上の関係  $U^{\#}$  で定義されるグラフ

$$S=(VE^{\#}, U^{\#}, \phi_v, \phi_A) \quad (2.1)$$

を層序グラフという(河西 2012, 2013).

$E^{\#}$  は形成時期に関する同値関係であり,  $[x], [y]$  のように地質体のラベルに記号  $[]$  を付けて表現する(河西, 2015).

$U^{\#}$  は次に示す順序対の集合である.

$$U^{\#}=\{([x], [y]) \mid [x] \in V, [y] \in V\}$$

$\phi_A$  は順序対  $(x, y)$  に接触関係の名称の集合  $A$ =(整合, 不整合, 貫入, 断層)の1つの元を対応つける写像  $\phi_A: R \rightarrow A$  である. 層序グラフは地質体間の新旧関係を表わしているため,  $A$  の元には包含と同時異相と逆転は含まれない.

推移的閉包により弧が追加されてそれらに新たな名称がつけられることがあるが, 推移的閉包によりつけられた弧は破線で表し, 弧のラベルは一律に”推論”とする.

本文では, 地質体の形成順序と地質体間の接触関係を含めたものを層序と呼ぶ(河西, 2012). 層序グラフでは入次数が1の頂点が形成時期が最も古い地質体を表し, 出次数が1の頂点が形成時期が最も新しい地質体を表す. 形成時期が最も古い地質体から, 最も新しい地質体まですべての頂点を通る道が層序になる.

### 3. 層序の演算

#### 3-1. グラフの和

2つの無向グラフをそれぞれ  $H_1=(V_1, E_1), H_2=(V_2, E_2)$  とする.  $H_1$  と  $H_2$  を合成して1つのグラフを作成することをグラフの和という. グラフの和は  $H_1 \cup H_2=(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$  で表される(Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., 2008). 無向グラフの辺には方向性がないので,  $(v_i, v_j)=(v_j, v_i)$  である. 辺が方向を持つ有向グラフ及びラベル付

き有向グラフの和は  $H_1 \cup H_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$  で表される. 弧には方向性があるので  $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$  である. 有向グラフではグラフの和により多重弧が形成されることがある.

4. 露頭間の層序の演算

2つの層序グラフ  $S_1$  と  $S_2$  の和は, 露頭で識別される層序グラフ  $S_1$  と  $S_2$  から地域層序を求めることに相当する. ある露頭で識別される層序を露頭層序, 複数の露頭層序から組み立てられる層序を地域層序  $S_L$  と称し, 露頭層序から地域層序を組み立てることを層序の演算と称する. また, 複数の露頭層序式の演算から地域層序を求めることができることを演算可能と称する. 2つの層序グラフを比較する場合, それぞれ頂点に同じ記号が付けられていれば同じ地質体を表しているものとする. 対応する頂点間を連結する弧のラベルは等しいものとして議論を進める.

層序の演算には, 同等, 包含, 追加・挿入の3種類が存在する.

$$S_L = S_1 \cong S_2 = S_1 \text{ or } S_2 \quad (4.1) \dots \text{同等}$$

$$S_L = S_1 \supseteq S_2 = S_1 \quad (4.2) \dots \text{包含}$$

$$S_L = S_1 * S_2 = S_3 \quad (4.3) \dots \text{追加・挿入}$$

追加・挿入では  $S_1$  や  $S_2$  と異なる形のグラフ  $S_3$  が形成される.

4-1-1 同等

2つの層序グラフ  $S_1$  と  $S_2$  が同等とは  $S_1$  と  $S_2$  が互いに自形であることをいう. 有向グラフの場合,  $S_1$  と  $S_2$  が同形であるとは,  $S_1$  と  $S_2$  に次の写像  $\theta$  と  $\psi$  が存在することである.  $\psi(x)$  は頂点  $x$  に対応している頂点である.

$$\theta: V_1 \rightarrow V_2$$

$$\forall x, y \in V_1 \text{ について } (x, y) \in A_1 \Leftrightarrow (\psi(x), \psi(y)) \in A_2$$

さらに, 次の写像  $\eta$  が存在する必要がある.

$$\eta: x, y \in V_1 \Leftrightarrow \psi(x), \psi(y) \in A_2$$

写像  $\eta$  は対応する頂点間の弧の方向が同じであることを意味する.

ラベル付き有向グラフの場合は, さらに

$$\phi_v(x) \in V_1 = \phi_v(\psi(x)) \in V_2 \quad (4.4)$$

$$\phi_A(x, y) \in A_1 = \phi_A(\psi(x), \psi(y)) \in A_2 \quad (4.5)$$

が成り立つときは  $S_1$  と  $S_2$  は自形になる. これは頂点と弧のラベルが同じであることを意味する.  $S_1$  と  $S_2$  が同形であることを  $S_1 \cong S_2$  と書く(Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., 2008).

本論文では, 頂点だけからなるグラフを空グラフと呼ぶことにする. 空グラフは1つの地質体しか露出していない露頭に対応している. この場合,  $\phi_v(x) \in V_1 = \phi_v(\psi(x)) \in V_2$  であれば自形, すなわち同等になる.

第1図は同等の例である. 露頭断面(a)と(b)の演算を考える. 断面(a)と(b)の両方とも互いに整合に接触する3つの地質体  $x, y, z$  から構成されている. 断面(a)の露頭層序グラフを  $S_A$  とし, 断面(b)の露頭層序グラフを  $S_B$  とする.  $S_A$  は

$$V_A = \{\phi_v(x), \phi_v(y), \phi_v(z)\}$$

$$A_A = \{\phi_A(x, y), \phi_A(y, z)\}$$

である.  $S_B$  は

$$V_B = \{\phi_v(x), \phi_v(y), \phi_v(z)\}$$

$$A_B = \{\phi_A(x, y), \phi_A(y, z)\}$$

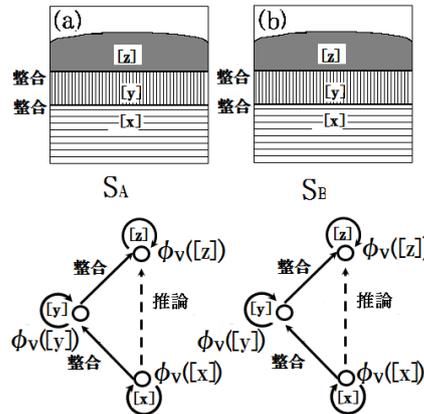
である.

各頂点  $v_i$  に対して  $\phi_v(v_i) \in V_A = \phi_v(\psi(v_i)) \in V_B$  が成立し,

$$\phi_A(x, y) \in A_A = \phi_A(\psi(x), \psi(y)) \in A_B = \text{整合}$$

$$\phi_A(y, z) \in A_A = \phi_A(\psi(y), \psi(z)) \in A_B = \text{整合}$$

が成立している.  $S_A$  と  $S_B$  は自形であり,  $S_A \cong S_B$  が成立している. 式(4.1)により, 演算結果のグラフは  $S_A$  あるいは  $S_B$  と同じである



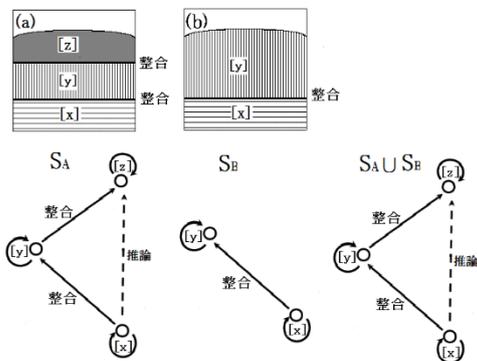
第1図 同等の例

露頭断面(a)と(b)の演算は同等の例である. 各断面に対応する層序グラフを  $S_A, S_B$  に示す. 頂点のラベルとして地質体を識別する記号と地質体名称の両方を付けてある.

4-1-2. 包含

層序グラフ  $S_1$  が層序グラフ  $S_2$  を包含するとは  $S_2$  が  $S_1$  の部分グラフであることを意味する.  $S_2$  が  $S_1$  の部分グラフであるということは  $V_2 \subseteq V_1, A_2 \subseteq A_1$  が成立し, さらに(4.4)式と(4.5)式が成立することである. 層序グラフは有向グラフなので,  $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$  である.  $V_2$  が  $V_1$  の全域で, かつ  $V_1$  による誘導部分グラフである場合,  $S_2$  は  $S_1$  自身と同じになるので同等になる.

第2図は包含の例である. 露頭断面(a)の層序グラフを  $S_A$  とし, 露頭断面(b)の層序グラフを  $S_B$  とする. 断面(a)は互いに整合関係にある3つの地質体  $x, y, z$  から構成される露頭あり, 断面(b)は整合関係にある2つの地質体  $x$  と  $y$  から構成される露頭である.



第2図 包含の例

露頭断面(a)と(b)の演算結果を示す. 各露頭断面に対応する層序グラフを  $S_A, S_B$  に示す.

$S_A$ は

$$V_A = \{\varphi_V([x]), \varphi_V([y]), \varphi_V([z])\}$$

$$A_A = \{\varphi_A([x], [y]), \varphi_A([y], [z])\}$$

であり,  $S_B$ は

$$V_B = \{\varphi_V([x]), \varphi_V([y])\}$$

$$A_B = \{\varphi_A([x], [y])\}$$

である.  $V_B \subseteq V_A, A_B \subseteq A_A$ なので,  $S_B$ は  $S_A$ の部分グラフになっている.  $S_A$ と  $S_B$ の演算結果  $S_A \cup S_B$ は  $S_A$ になる.

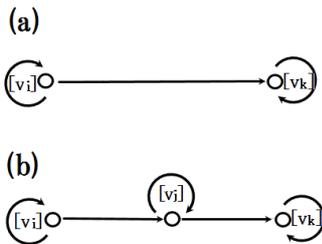
### 4-1-3. 追加・挿入

追加・挿入とは, 2つの露頭層序グラフ  $S_1$ と  $S_2$ の演算から, 同等包含以外の方法により新しい地域層序グラフ  $S_L$ を形成することである. 追加・挿入は整合の場合と不整合の場合では処理方法が異なる.

形成順序が  $[v_i], [v_k]$ である2つの地質体の接触関係が,  $\varphi_A([v_i], [v_k]) = \text{不整合の場合}$ , 両者の間に異なる地質体  $[v_j]$ が存在する可能性がある. ここでは説明の便宜上, 浸食により除去された地質体は1つの地質体としてある.

グラフから弧  $([v_i], [v_k])$ を除去し, 新たな頂点  $[v_j]$ を追加し, さらに弧  $([v_i], [v_j])$ と弧  $([v_j], [v_k])$ を追加することを弧の細分という. 弧  $([v_i], [v_k])$ の向きと, 細分により形成された弧  $([v_i], [v_j])$ と弧  $([v_j], [v_k])$ の向きは同じである. 弧の細分を第3図に示す.

$\varphi_A([v_i], [v_k])$ が整合である場合は弧  $([v_i], [v_k])$ は細分できない. 一方,  $\varphi_A([v_i], [v_k]) = \text{不整合の場合}$ は弧  $([v_i], [v_k])$ は細分される. 細分された弧  $([v_i], [v_j])$ と  $([v_j], [v_k])$ のどちらか, 例えば  $\varphi_A([v_i], [v_j]) = \text{整合の場合}$ は弧  $([v_i], [v_j])$ はこれ以上細分されない.  $\varphi_A([v_i], [v_j]) = \text{不整合の場合}$ はさらに細分される可能性がある.



第3図 弧の細分

(a)の弧  $([v_i], [v_k])$ のラベルが不整合の場合, (b)に示すように頂点  $[v_j]$ により弧  $([v_i], [v_j])$ と弧  $([v_j], [v_k])$ の2つに細分される.

層序グラフの演算により新しい弧が追加される場合がある.  $A_1 \cup A_2$ を  $A_L$ で表す.  $A_L$ の任意の元の間には推移律  $([v_i], [v_j]) \wedge ([v_j], [v_k]) \Rightarrow ([v_i], [v_k])$ が成立し, かつ  $([v_i], [v_k])$ が  $A_L$ の元でない場合,  $([v_i], [v_k])$ は推移的閉包である. これを規則1とする.

$A_L$ の任意の元の間には推移律  $([v_i], [v_j]) \wedge ([v_j], [v_k]) \Rightarrow ([v_i], [v_k])$ が成立し, かつ  $([v_i], [v_k])$ が  $A_L$ の元である場合, 弧  $([v_i], [v_k])$   $[v_i]$ は推移的閉包に変わる. これを規則2とする.

#### (1)整合

第4図に整合の追加・挿入の例を示す. 露頭断面(a)と露頭断面(b)の演算を考える. 露頭断面(a)は互いに整合関係にある地質体  $[x]$ と  $[y]$ からなり, 露頭断面(b)は互いに整合関係にある地質体  $[y]$ と  $[z]$ からなる. 対応する層序グラフを  $S_A$ と  $S_B$ に示す.

$S_A$ は

$$V_A = \{\varphi_V([x]), \varphi_V([y])\}$$

$$A_A = \{\varphi_A([x], [y])\}$$

であり,  $S_B$ は

$$V_B = \{\varphi_V([y]), \varphi_V([z])\}$$

$$A_B = \{\varphi_A([y], [z])\}$$

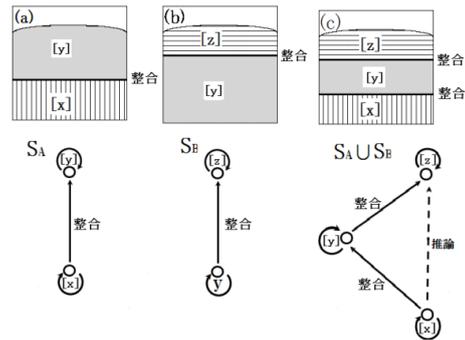
である.

この2つの層序グラフの演算  $S_A \cup S_B$ は

$$V_A \cup V_B = \{\varphi_V([x]), \varphi_V([y]), \varphi_V([z])\}$$

$$A_A \cup A_B = \{\varphi_A([x], [y]), \varphi_A([y], [z])\}$$

となる.  $S_A \cup S_B$ を露頭断面(c)及び層序グラフに示す. 弧の集合  $A_A \cup A_B$ の元  $([x], [y])$ と  $([y], [z])$ には推移律  $([x], [y]) \wedge ([y], [z]) \Rightarrow ([x], [z])$ が成立しており, かつ弧  $([x], [z])$ は  $A_A \cup A_B$ の元ではない. このため, 規則1から弧  $([x], [z])$ は推移的閉包になる. 追加・挿入による演算では頂点, すなわち地質体の数が増加している.



第4図 整合の場合の追加の例

断面(a)と断面(b)の演算の結果を断面(c)に示す. 対応する層序グラフをそれぞれ(a'), (b'), (c')に示す. 弧はすべて整合なので弧の細分は行われな

#### (2)不整合面

第5図に不整合の追加の例を示す.

断面(a)は互いに整合関係にある地質体  $[x]$ と  $[y]$ からなる. 露頭断面(b)は地質体  $[x]$ と  $[z]$ からなり, 不整合で接触している. 対応する層序グラフをそれぞれ  $S_A$ と  $S_B$ に示す.

$S_A$ は

$$V_A = \{\varphi_V([x]), \varphi_V([y])\}$$

$$A_A = \{\varphi_A([x], [y])\}$$

$S_B$ は

$$V_B = \{\varphi_V([x]), \varphi_V([z])\}$$

$$A_B = \{\varphi_A([x], [z])\}$$

である.

この2つの層序グラフの演算は

$$V_A \cup V_B = \{\varphi_V([x]), \varphi_V([z]), \varphi_V([y])\}$$

$$A_A \cup A_B = \{\varphi_A([x], [y]), \varphi_A([x], [z])\}$$

となる。この演算結果を層序グラフ $(S_A \cup S_B)_1$ に示す。頂点 $[x]$ を始点とする2つの弧 $([x], [y])$ と $([x], [z])$ が存在するグラフとなる。 $\varphi_A([x], [y])$ =整合、 $\varphi_A([x], [z])$ =不整合である。 $(S_A \cup S_B)_1$ では $[y]$ と $[z]$ の関係がわからない。しかし、 $\varphi_A([x], [y])$ =整合なので $[x]$ の堆積に連続して $[y]$ が堆積している。

$\varphi_A([x], [z])$ =不整合なので弧 $([x], [z])$ は細分される可能性がある。 $\varphi_A([x], [y])$ =整合なので細分されることはなく、かつ $[x], [y]$ という層序となる。このため弧 $([x], [z])$ は頂点 $[y]$ により細分され、弧 $([x], [y])$ と弧 $([y], [z])$ が形成される。細分により形成された弧 $([y], [z])$ の関係は不明である。このため、弧のラベルの集合  $A$  の元に関係不明を追加し

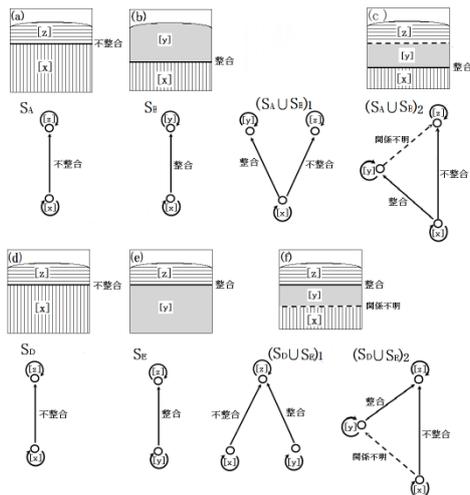
$A = \{\text{整合, 不整合, 貫入, 断層, 関係不明}\}$

とすると、弧 $([y], [z])$ のラベルは関係不明になる。

$A_L$ の元 $([x], [y])$ と $([y], [z])$ には推移律

$$([x], [y]) \wedge ([y], [z]) \Rightarrow ([x], [z])$$

が成立しているが、弧 $([x], [z])$ は  $A_L$  の元ではない。規則(3.1)から弧 $([x], [z])$ は推移的閉包になる。この演算結果の層序式を $(S_A \cup S_B)_2$ に、露頭断面を(c2)に示す。



第5図 不整合面の追加・挿入の例

露頭断面(d)は不整合関係にある地質体 $[x]$ と $[z]$ からなる。断面(e)は互いに整合関係にある地質体 $[y]$ と $[z]$ からなる。対応する層序グラフをそれぞれ  $S_B$  と  $S_E$  に示す。  $S_B$  は

$$V_B = \{\varphi_V([x]), \varphi_V([z])\}$$

$$A_B = \{\varphi_A([x], [z])\}$$

であり、  $S_E$  は

$$V_E = \{\varphi_V([y]), \varphi_V([z])\}$$

$$A_E = \{\varphi_A([y], [z])\}$$

である。

この2つの層序グラフの演算は(3.3)式より、

$$V_D \cup V_E = \{\varphi_V([x]), \varphi_V([y]), \varphi_V([z])\}$$

$$A_D \cup A_E = \{\varphi_A([x], [z]), \varphi_A([y], [z])\}$$

となる。この演算結果を層序グラフ $(S_B \cup S_E)_1$ に示す。このグラフは頂点 $[z]$ を終点とする2つの弧 $([x], [z])$ と $([y], [z])$ からなる。 $[x]$ と $[y]$

の関係は不明である。

$\varphi_A([x], [z])$ =不整合なので、弧 $([x], [z])$ は細分される可能性がある。 $\varphi_A([y], [z])$ =整合なので、弧 $([y], [z])$ は細分されず、かつ層序は $[y], [z]$ である。このため、弧 $([x], [z])$ は頂点 $[y]$ により細分され、弧 $([x], [y])$ と弧 $([y], [z])$ が形成される。 $\varphi_A([x], [y])$ =関係不明である。この演算結果を層序グラフ $(S_B \cup S_E)_2$ に示す。

### 5. あとがき

2つの露頭の露頭層序の組み合わせから地域層序を組み立てる方法を検討した。層序グラフの演算の種類には、同等、包含、追加・挿入の3種類がある。2つの露頭から地域層序が作成できない場合、さらに近隣の別の露頭層序を加えることにより、最終的に地域層序を組み立てることができる。

### 文献

Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (2008) *Graph Theory*. Springer, pp.12-29.  
 河西秀夫(2003)個人用(野帳)データベースの設計について(2)一層序の表現方法について。情報地質, vol.14, no.3, pp.249-258  
 河西秀夫(2005)個人用露頭データベースの設計について(3)一層序の表現方法の改善について。情報地質, vol.16, no.2, pp.57-68.  
 河西秀夫(2006)個人用露頭データベースの設計について(4)一基盤、被覆層、互層の理論的背景。情報地質, vol.17, no.1, pp.13-27.  
 Kasai, H.(2009) *Design of geological exposure database -Structure graph: Mathematical model of geological structure of outcrops and regions based on graph theory-*. Geoinformatics, vol.20, no.1, pp.17-29.  
 河西秀夫(2012)グラフ理論による露頭構造と層序の数学的表現。情報地質, vol.23, no.3, pp.109-120  
 河西秀夫(2013)グラフ理論による露頭構造と層序の数学的表現一貫入と断層の取り扱い。情報地質, vol.24, no.4, pp.161-173  
 河西秀夫(2015)グラフ理論による露頭構造と層序の数学的表現一レンズ層と同時異相。情報地質, vol.26, no.2, pp.37-50  
 河西秀夫(2016)グラフ理論による露頭構造と層序の数学的表現一逆転する地層の表現。情報地質, vol.27, no.3, pp.137-148  
 Rainhard Disetel(2005) *Graph Theory 3<sup>rd</sup> ed.* Springer  
 Robin.J.Wilson(2010) *Intoduction to Graph Theopy 5<sup>th</sup> ed.*, Peaeson Education, pp.18