情報地質 第28巻 第2号 066-069頁 2017年
Geoinformatics, vol.28, no.2, pp.066-069, 2017

全順序集合上の区間のグラフを用いた無産出区間の生存種の推定

山口 久美子*・塩野　清治**

Estimation of Living Taxa in Age of Barren Intervals by Graph of Intervals on a Totally Ordered Set

Kumiko YAMAGUCHI* and Kiyoji SHIONO**

＊5-3-5 Midorigaoka, Heguri Ikoma-gun Nara 636-0941, Japan.　E-mail: qys05253@nifty.ne.jp
**大阪市立大学名誉教授 Professor Emeritus of Osaka City University, 5-10, Daido-cho Ibaraki-shi, Osaka 567-0844, Japan.

キーワード：生層序区分，化石群集，化石帯，区間，論理地質学
Key words：Biostratigraphic Classification, Fossil Assemblage, Range Zone, Interval, Geology-Oriented Logical System

１．はじめに

層序断面中にタクソン化石帯の中に，化石を含まない無産出区間は普通にある．無産出区間は生層序区分の対象外であることが多いが，生層序区分のアルゴリズムの開発には，無産出区間の取り扱いを考える必要がある．

一方，全順序集合上の区間のグラフは，タクソンにもとづいた年代の生存種の順序をある規則で表現する(山口・塩野，2013)．本研究では，全順序集合上の区間のグラフを用いて，無産出区間の期間の生存種を推定してみた．

２．基本となる生存種の区間グラフ

2.1　時刻と期間

時間軸上の或る時刻を 0(原点)として，時刻を 100 万年，1 万年，年などの時間の単位で測定して，小数点以下を切り捨てた整数で表し，その整数が小さいほど，過去の時刻であるとする．以下，時刻を $t1, t2, t3, \ldots$と書き，$t1 \leqq t2 \leqq t3 \leqq \ldots$とする．

時刻 $t1$ から時刻 $t2$ までの時間，あるいは，期間を，$t1$ 以上 $t2$ 以下の実数の区間$[t1, t2]$とする．

$[t1, t2]=\{ t \mid t1 \leqq t \leqq t2$，$t$ は実数$\}$　(1)

2.2　タクソンの生存期間とサンプルから産出される化石

生物の個体は(1)のような期間に生存すると仮定する．

タクソン(taxon)は生物の分類単位である．本研究では，タクソンを，それに分類された個体の集合として扱う．また，タクソンの生存期間を個体の生存する期間の和集合であると定義する．どのタクソンの生存期間も(1)のような期間であると仮定する．

第 1 図のように，層序断面から採取したサンプルを $s1$, $s2$，$s3$，…と書くことにする．$s1$，$s2$，$s3$，…は，それぞれ，層序断面に設定された時刻 $t1$，$t2$，$t3$，…の時間面であるとする．タクソンの層序断面中のすべてのサンプルに化石が産出されると仮定する．

2.3　上位のタクソン Σ と種の集合 S

タクソンは階層的であり，上位から界，門，綱，目，科，属，種である．Σ を上位のタクソンとし，Σ の種の集合を S_0 とする．種 α の生存期間を τ(α)とする．α もタクソンであるから，τ(α)も(1)のような期間であるという仮定を満たす．

種の生存期間の前後関係＜★を次のように定義する．

$\tau(\alpha) <^{\star} \tau(\beta) \Leftrightarrow \min \tau(\alpha) < \min \tau(\beta)$，かつ，
$\max \tau(\alpha) < \max \tau(\beta)$.　(2)

S_0 上の順序 κ を次のように定義する．

$\alpha \,\kappa\, \beta \Leftrightarrow \tau(\alpha) <^{\star} \tau(\beta)$，または，$\alpha = \beta$.　(3)

S_0 から次の 2 つの仮定を満たす種の集合 S を選択して，塩野・山口(1997)と同様に，T を年代区分する．

仮定 1　(S, κ)は有限な全順序集合である．

仮定 2　$T = \cup_{\alpha \in S} \tau(\alpha)$.

第 1 図は，仮定 1，2 を満たす 3 つの種の集合 $S=\{\alpha, \beta, \gamma\}$を選択した例である．Σ の生存期間 T は，

$T = [t1, t9]=\{ t \mid t1 \leqq t \leqq t9$，$t$ は実数$\}$

であり，$\tau(\alpha) =[t1, t4]$, $\tau(\beta) =[t3, t7]$,$\tau(\gamma) =[t6, t9]$である．(2), (3)より，$\alpha\kappa\beta\kappa\gamma$ である．T を 5 つの年代$[t1, t3]$，$[t3, t4]$，$[t4, t6]$，$[t6, t7]$，$[t7, t9]$に区分する．

2.4　生存種

時刻 t に生存する種の集合 σ を

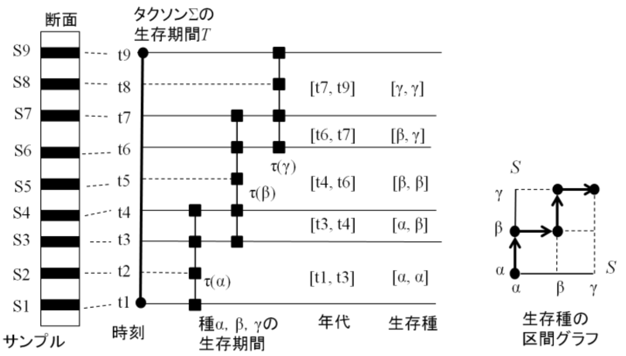
$\sigma=\{ \alpha | t \in \tau(\alpha)$，$\alpha \in S \}$　(4)

とし，サンプル s に含まれる化石種の集合とする．σ を t の生存種とよぶことにする．$t1$，$t2$，$t3$，…の生存種をそれぞれ，σ1，σ2，σ3，…と書くことにする．

塩野・山口(1997)より，S が仮定 1，2 を満たすとき，σ は 有限な全順序集合(S, κ)上の区間になる．ここで，有限な全順序集合(S, κ)上の区間$[\alpha, \beta]$とは，$\alpha \,\kappa\, \beta$ である $\alpha, \beta \in S$ に対して，

$[\alpha, \beta] =\{\gamma | \alpha \,\kappa\, \gamma$，かつ，$\gamma \,\kappa\, \beta, \gamma \in S \}$　(5)

である．



第１図　仮定１，２を満たす S={α, β, γ}を選択した例．

(S, κ)上のすべての区間の集合 $S^\star$上の順序 $\kappa^\star$を

$$[\alpha, \beta]\ \kappa^\star[\gamma, \delta] \Leftrightarrow \quad \alpha\ \kappa\ \gamma,\ \text{かつ},\ \beta\ \kappa\ \delta \tag{6}$$

と定義する．

S が仮定 1，2 を満たすとき，$\sigma1\kappa^\star\sigma2\kappa^\star\sigma3\kappa^\star\ldots$であり，生存種の集合と年代の集合が 1 対 1 対応する．

第 1 図の例では, (4)と(5)より, 生存種は $\sigma3=\sigma2=\{\alpha\}=[\alpha,\alpha]$, $\sigma3=\sigma4=\{\alpha, \beta\}=[\alpha, \beta]$，$\sigma5=\{\beta\}=[\beta, \beta]$，$\sigma6=\sigma7=\{\beta, \gamma\}=[\beta, \gamma]$, $\sigma8=\sigma9=\{\gamma\}=[\gamma, \gamma]$であり，それぞれ，5 つの年代[$t1$, $t3$]，[$t3$, $t4$]，[$t4$, $t6$]，[$t6$, $t7$]，[$t7$, $t9$]に対応する．

2.5　生存種の区間グラフ

(S, κ)上の区間[α, β]を，$S\times S$ の座標図上の点(α, β)で表示する(塩野・山口，1996)．このような座標図を区間グラフ，あるいは，単に，グラフとよぶ．$[\alpha, \beta]\ \kappa^\star[\gamma, \delta]$をグラフ上で，点(α, β)から(γ, δ)への矢印で表示する．山口・塩野(2013)より，3 つの種の集合 S={α, β, γ}，$\alpha\ \kappa\ \beta\ \kappa\ \gamma$ の場合，生存種 σ の順序 $\kappa^\star$を表す区間グラフは第 2 図(a)，(b)のいずれかグラフ表示されて，生存種 σ の順序 $\kappa^\star$は

$$[\alpha, \alpha]\ \kappa^\star[\alpha, \beta]\ \kappa^\star[\beta, \beta]\kappa^\star[\beta, \gamma]\ \kappa^\star[\gamma, \gamma], \tag{7}$$

あるいは,

$$[\alpha, \alpha]\ \kappa^\star[\alpha, \beta]\ \kappa^\star[\alpha, \gamma]\kappa^\star[\beta, \gamma]\ \kappa^\star[\gamma, \gamma] \tag{8}$$

のいずれかである．第 2 図(a)，(b)は，それぞれ，(7)，(8)を表示する区間グラフである．以下，生存種 σ の順序 $\kappa^\star$を表す区間グラフを，生存種の区間グラフとよぶことにする．

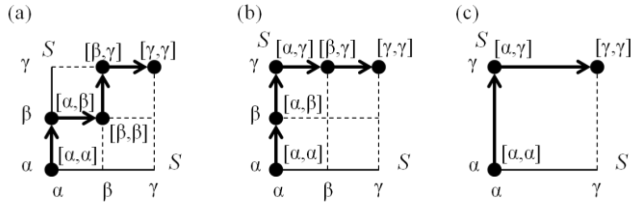
第 1 図の例では, (4)と(5)より, 生存種は $\sigma3=\sigma2=\{\alpha\}=[\alpha,\alpha]$, $\sigma3=\sigma4=\{\alpha, \beta\}=[\alpha, \beta]$，$\sigma5=\{\beta\}=[\beta, \beta]$，$\sigma6=\sigma7=\{\beta, \gamma\}=[\beta, \gamma]$, $\sigma8=\sigma9=\{\gamma\}=[\gamma, \gamma]$である．(6)より，生存種 σ の順序 $\kappa^\star$は(7)であり，第 2 図(a)のグラフで表示される．第 1 図右にもその区間グラフを示した．

第 2 図(c)は，2 つの種の集合 S={α,γ}，$\alpha\ \kappa\ \gamma$ のときの生存種の区間グラフである．生存種の順序は

$$[\alpha, \alpha]\ \kappa^\star[\alpha, \gamma]\kappa^\star[\gamma, \gamma] \tag{9}$$

と推定される．

第 2 図の区間グラフを基本に無産出区間の期間の生存種を推定する．



第 2 図　生存種の区間のグラフ．

(a) S={α, β, γ}を選択した場合．$[\alpha, \alpha]\ \kappa^\star[\alpha, \beta]\ \kappa^\star[\beta, \beta]\kappa^\star[\beta, \gamma]\ \kappa^\star[\gamma, \gamma]$.
(b) S={α, β, γ}を選択した場合．$[\alpha, \alpha]\ \kappa^\star[\alpha, \beta]\ \kappa^\star[\alpha, \gamma]\kappa^\star[\beta, \gamma]\ \kappa^\star[\gamma, \gamma]$.
(c) S={α, γ}を選択した場合．$[\alpha, \alpha]\ \kappa^\star[\alpha, \gamma]\ \kappa^\star[\gamma, \gamma]$.

３．無産出区間の生存種の推定

3.1　無産出区間

改めて，タクソン Σ の生存期間 T は,

$$T = [t1, t9]=\{\ t\ |\ t1 \leqq t \leqq t9,\ \ t\ \text{は実数}\}$$

であると仮定するが，このとき，層序断面中の $s1$ から $s9$ までのすべてのサンプルに, Σ の化石が産出されるとは限らないとする．第 3 図〜第 5 図は，　$s1$ から $s4$ までのサンプルと，$s6$ から $s9$ までのサンプルには Σ の化石が含まれるが, $s5$ のような $s4$ と $s6$ の間にあるサンプルには Σ の化石が含まれない場合である．この無産出区間は $s4$ より上，から $s6$ より下であるとする．無産出区間の期間は[$t4$, $t6$]である．

3.2　無産出区間の上下に同じ化石種が現れる場合１

第 3 図の例では，無産出区間の下位には，$\tau(\alpha)\supset[t1, t4]$, $\tau(\beta)\supset[t3, t4]$が現れていて，上位には $\tau(\beta)\supset[t6, t7]$，$\tau(\gamma)\supset[t6, t9]$が現れている．ここで，⊃で表現しているのは，無産出区間の下位，上位に生存期間の 1 部分が現れているからである．例えば，$\tau(\beta)\supset[t6, t7]$は，τ(β)は[$t6$, $t7$]を含む期間であるという意味である．

τ(β)は期間であると仮定されているので, 下位の $\tau(\beta)\supset[t3, t4]$と無産出区間[$t4$, $t6$]，および, 上位の $\tau(\beta)\supset[t6, t7]$をつないで,

$$\tau(\beta) =[t3, t4]\cup[t4, t6]\cup[t6, t7]=[t3, t7]$$

と仮定される．

α は無産出区間の下位にしか現れないので，τ(α)は無産出の期間にも延長されて，α の絶滅時刻 max τ(α)は,

$$t4 \leqq \max\tau(\alpha) \leqq t6\text{-}1$$

であると推定される．

γ は無産出の期間の上位にしか現れないので，無産出の期間に γ が出現して，α の出現時刻 min τ(γ)は,

$$t4+1 \leqq \min\tau(\gamma) \leqq t6$$

であると推定される．

第 3 図(a), (b)からもわかるように, このように τ(α), τ(β), τ(γ)を推定すると，S={α, β, γ}は仮定 1,2 を満たしている．よって，生存種の順序は，第 2 図(a)，あるいは，第 2 図(b)の区間グラフで表示されると推定される．

$[\alpha, \alpha]\ \kappa^\star[\alpha, \beta]$は無産出区間の下位に, $[\beta,\gamma]\ \kappa^\star[\gamma, \gamma]$の上位に現れている．第 2 図(a)，(b)の区間グラフから, [α, β]と[β, γ]の間の生存種を推定する．

第 3 図(a)は，第 2 図(a)の区間グラフより，[α,β]と[β,γ]の間の生存種を[β,β]と推定した例である．生存種の順序が(7)で，第 2 図(a)の区間グラフで表示されると推定した例である．無産出の期間内に α と γ は生存しないで，β だけが生存する時刻 $t5$ がある．T 全体の生存種の順序が(7)で，無産出の期間の生存種の順序は

$$[\alpha, \beta]\ \kappa^\star[\beta, \beta]\kappa^\star[\beta, \gamma]$$

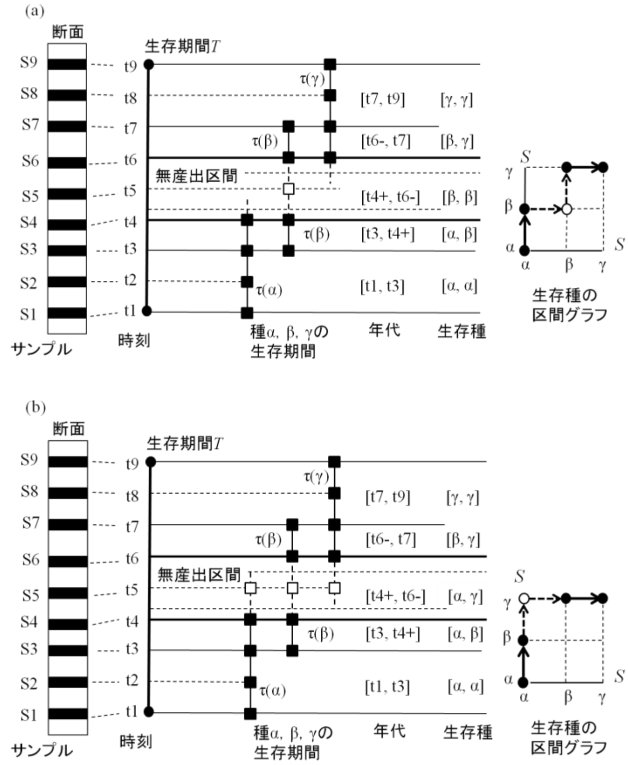
であると推定される．第 3 図(a)右は推定した生存種の区間グラフである．このグラフでは，無産出の期間の生存種の順序 $\kappa^\star$を破線で，無産出の期間だけに現れる生存種[β, β]を白丸で示した．

第 3 図(b)は，第 2 図(b)の区間グラフを使って，[α, β]と[β, γ]の間の生存種を[α, γ]と推定した例である. 無産出の期間内に α と β と γ が生存する時刻 $t5$ がある．T 全体の生存種の順序が(8)である．無産出の期間の生存種の順序は

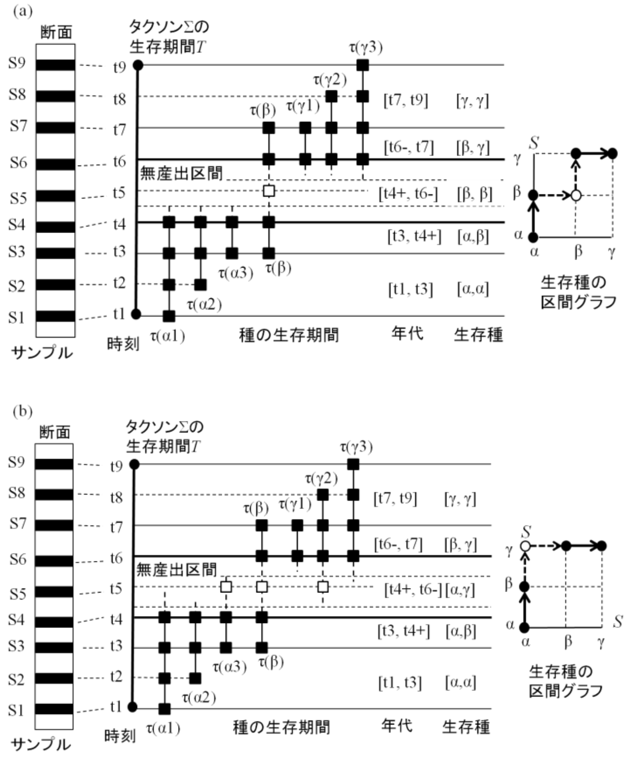
$$[\alpha, \beta]\ \kappa^\star[\alpha, \gamma]\kappa^\star[\beta, \gamma]$$

であると推定される．同様に，第 3 図(b)右は推定した生存種の区間グラフである．

第 3 図(a)，(b)のどちらも，5 つの年代[$t1$, $t3$]，[$t3$, $t4$+]，[$t4$+, $t6$-]，[$t6$-, $t7$]，　[$t7$, $t9$]に区分されると推定される．$t4$+は $t4$ 以上の時刻，$t6$-は $t6$ 以下の時刻である．



第 3 図　無産出区間の上下に同じ化石種 β が現れる場合 1.
(a) 無産出の期間に生存種[β, β]が推定される例.
(b) 無産出の期間に生存種[α,γ]が推定される例.



第 4 図　無産出区間の上下に同じ化石種 β が現れる場合 2.
α=α1∪α2∪α3，γ=γ1∪γ2∪γ3 として推定する.
(a) 無産出の期間に生存種[β, β]が推定される例.
(b) 無産出の期間に生存種[α,γ]が推定される例.

3.2　無産出区間の上下に同じ化石種が現れる場合 2

第 4 図(a), (b)の例では, 無産出区間の下位には, $\tau(\alpha1)\supset[t1, t4]$，$\tau(\alpha2)\supset[t2, t4]$，$\tau(\alpha3)\supset[t3, t4]$，$\tau(\beta)\supset[t3, t4]$が現れていて，上位には $\tau(\beta)\supset[t6, t7]$，$\tau(\gamma1)\supset[t6, t7]$，$\tau(\gamma2)\supset[t6, t8]$，$\tau(\gamma3)\supset[t6, t9]$が現れている.

この場合，第 3 図の場合と同様に，τ(β)は下位の[$t3$, $t4$]と上位の[$t6$, $t7$]をつないで $\tau(\beta)=[t3, t7]$と仮定される.

無産出区間の下位に現れている τ(α1)，τ(α2)，τ(α3)を無産出の期間に延長するが，(2)で定義した τ(α1)，τ(α2)，τ(α3)の前後関係$<^{\star}$は不明である. 無産出区間の上位にある τ(γ1), τ(γ2)，τ(γ3)の前後関係$<^{\star}$も同様に不明である.

そこで, 無産出区間の下位だけに現れる種(個体の集合)α1, α2，α3 を α にまとめて,

$$\alpha=\alpha1\cup\alpha2\cup\alpha3$$

とする．このとき，生存期間は個体の生存する期間の和集合であるから,

$$\tau(\alpha)=\tau(\alpha1)\cup\tau(\alpha2)\cup\tau(\alpha3)$$

である．また，無産出区間の上位だけに現れる種 γ1，γ2，γ3 についても，同様に,

$$\gamma=\gamma1\cup\gamma2\cup\gamma3$$

とする．τ(γ)は,

$$\tau(\gamma)=\tau(\gamma1)\cup\tau(\gamma2)\cup\tau(\gamma3)$$

である．このように，α と γ を作ると，無産出区間の下位に現れる 3 つの区間の和集合：

$$[t1, t4]\cup[t2, t4]\cup[t3, t4] =[t1, t4]$$

は，τ(α)の部分集合であるから,

$$\tau(\alpha)\supset[t1, t4]$$

である．同様に，無産出区間の上位に現れる 3 つの区間の和集合[$t6$, $t9$]も,

$$\tau(\gamma)\supset[t6, t9]：$$

である．この α，β，γ は第 3 図(a)，(b)の例である．よって，第 3 図(a)，(b)の例の場合と同様に，無産出の期間の生存種が推定される．第 4 図(a)，(b)は，それぞれ，第 3 図(a)，(b)の例と同じ推定を図示したものである.

3.3　無産出区間の上下に同じ化石種が現れない場合

第 5 図では，第 4 図の無産出区間の上下に現れる β の下側を β1，上側を β2 に分けて，β=β1∪β2 とした例である．このとき，$\tau(\beta)= \tau(\beta1)\cup\tau(\beta2)$であり，無産出区間の下位に $\tau(\beta1)\supset[t3, t4]$があり，上位に $\tau(\beta2)\supset[t6, t7]$がある．τ(β1)と τ(β2) は無産出区間の期間につなぐことができて，$\tau(\beta1)\cup\tau(\beta2) =[t3, t7]$とする.

第4図と同様に, 無産出区間の下位に現れる種α1, α2, α3, β1 を α にまとめて,

$$\alpha=\alpha1\cup\alpha2\cup\alpha3\cup\beta1$$

とする．生存期間 τ(α)は,

$$\tau(\alpha)=\tau(\alpha1)\cup\tau(\alpha2)\cup\tau(\alpha3)\cup\tau(\beta1)$$

である．無産出区間の上位に現れる種 β2，γ1，γ2，γ3 も，同様に,

$$\gamma=\beta2\cup\gamma1\cup\gamma2\cup\gamma3$$

とし，τ(γ)は

$$\tau(\gamma)= \tau(\beta2)\cup\tau(\gamma1)\cup\tau(\gamma2)\cup\tau(\gamma3)$$

である．第 6 図このように，τ(α)と τ(γ)を作ると,

$$\tau(\alpha)\supset[t1, t4],\quad \tau(\gamma)\supset[t6, t9]$$

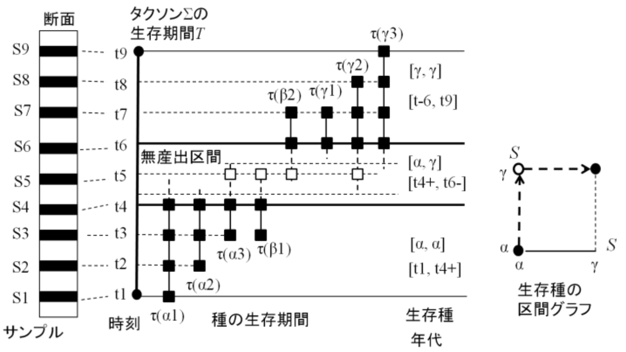
である．第 6 図は，この τ(α)と τ(γ)を示した図である．上位 τ(α)，τ(γ)を無産出の期間に延長して推定すると，(2)，(3)より,

$$\alpha\,\kappa\,\gamma$$

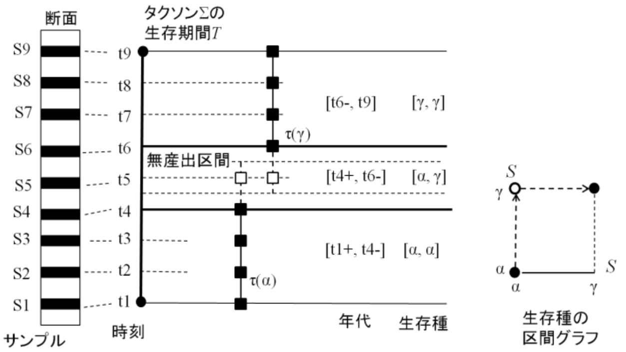
である．$\tau(\beta1)\cup\tau(\beta2)=[t3, t7]$は無産出の期間[$t4$, $t6$]を含むので,

$$\tau(\alpha)\cup\tau(\gamma) =[t1, t9]= T$$

と推定される．よって，$S=\{\alpha, \gamma\}$，α κ γ は仮定 1,2 を満たす



第 5 図　無産出区間の上下に同じ化石種が現れない場合．
$\alpha=\alpha1\cup\alpha2\cup\alpha3\cup\beta1$，$\gamma=\beta2\cup\gamma1\cup\gamma2\cup\gamma3$ とする．



第 6 図　無産出区間の下に α，上に γ が現れる場合．

と推定される．

τ(α)，τ(γ)が，それぞれ，無産出区間の下位，上位に現れている．無産出区間の下位の生存種は[α,α]であり，下位の生存種は[γ,γ]である．第 2 図(c)の S={α, γ}の場合の区間グラフで生存種を推定すると，[α,α]と間[γ,γ]に[α,γ]があり，T 全体の生存種の順序は(9)であると推定される．無産出の期間の生存種の順序も(9)と同じで，

$$[\alpha, \alpha]\ \kappa^{\star}[\alpha, \gamma]\kappa^{\star}[\gamma, \gamma]$$

と推定される．第 6 図右が推定された生存種の区間グラフである．生存種[α, α]，[α, γ]，[γ, γ]の年代は，それぞれ，[*t*1, *t*4+]，[*t*4+, *t*6-]，[-*t*6, *t*9]と推定した．

4．おわりに

3 つ，あるいは，2 つの種の集合を選択した場合の生存種の区間グラフを基本に，無産出の期間の生存種を推定してみた．無産出区間の下位だけに現れる幾つかの種，上位だけに現れる幾つかの種をそれぞれ 1 つにまとめると，無産出の期間の生存種が推定された．無産出区間の期間の生存種の推定に，3 つ，あるいは，2 つの種の集合を選択した場合の生存種の区間グラフが有用であった．

本研究の無産出区間の期間の生存種の推定が，生層序区分のアルゴリズムの開発に役立つことが期待される．

文　献

塩野清治･山口久美子(1996)全順序集合の区間とその前後関係のグラフ表示．GEOINFORUM－'96 講演予稿集．日本情報地質学会，pp.41-42.

塩野清治･山口久美子(1997)生層序学的方法を形式表現するための数学的基礎－古生物の生存期間と年代区分－．情報地質，vol.8, no.4, pp.227-237.

山口久美子･塩野清治(2013)全順序集合上の区間のグラフ表示を応用した生層序における化石のタクサの組み合わせの順序の表現．情報地質，vol.24, no.2, pp.086-087.